Equations différentielles

Equations différentielles

• 1er ordre

$(1-x^2)y' - 2xy = 3x^2 - 5x^4$

* Solution générale (Sans Second Membre SSM)

$(1-x^2)\frac{dy}{dx} - 2xy = 0$

$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{2x}{1-x^2}\,dx$

$\ln y = -\ln(1-x^2) + K_1$

$\ln\left|\frac{y}{K_1}\right| = \ln \frac{1}{1-x^2}$

$\boxed{y_0 = \frac{\lambda}{1-x^2} \quad \text{avec } \lambda = e^{|K_0|}}$

* Solution particulière (intuitive)

$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$y' = 3ax^2 + 2bx + c$

On injecte dans l'équation et on obtient, par identification : $a = 1$

$b = c = d = 0$

$\boxed{y_1 = x^3}$

* Solution particulière (variation

$y = \frac{\lambda}{1-x^2}$

$y' = \frac{\lambda'}{1-x^2} + \frac{2\lambda x}{(1-x^2)^2}$

On injecte et on obtient :

$\lambda' = 3x^2 - 5x^4$

$\lambda = x^3(1-x^2)$

$y_1 = \frac{\lambda}{1-x^2}$

$\boxed{y_1 = x^3}$

* Solution complète

$\boxed{y = y_0 + y_1}$ On trouve λ avec les conditions initiales

ex : $y' - ay = 0$ $\quad \frac{dy}{dx} = ay$ $\quad \int \frac{dy}{y} = \int a\,dx$ $\quad \ln y = ax + K_1$

• 2ème ordre

Une équation diff. du 2ème ordre est du type $ay'' + by' + cy = 0$

Pour résoudre, on pose $y = e^{rx}$

On se trouve avec une équation du 2nd degré, que l'on résoud : $ar^2 + br + c = 0$

On calcule Δ. Si
$$\begin{cases} \Delta > 0 & y_0 = \lambda_1 e^{r_1 x} + \lambda_2 e^{r_2 x} \\ \Delta = 0 & y_0 = e^{rx}(Ax + B) \\ \Delta < 0 & y_0 = e^{\alpha x}(A_1 \cos \beta x + A_2 \sin \beta x) \end{cases}$$
avec $\underbrace{\alpha = \frac{-b}{2a}}_{\text{partie Re}}$ et $\underbrace{\beta = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}}_{\text{partie Im}}$

Ex : $y'' + 4y = x \cos 2x$

* Solution générale

$y'' + 4y = 0$

$r^2 + 4 = 0$

$\Delta = -4 \quad \begin{cases} r_1 = 2i \\ r_2 = -2i \end{cases}$

$$\boxed{y_0 = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x}$$

* Solution particulière

si 2nd membre est de la forme :

$f(x) = P_n(x) \Rightarrow y = Z(x)$

$f(x) = e^{mx} P_n(x) \Rightarrow y = e^{mx} Z(x)$

$f(x) = e^{mx}[P(x) \cos \omega x + Q(x) \sin \omega x] \Rightarrow y = e^{(m+i\omega)x} Z(x)$

on remplace les cos, sin par les formules en e

* Solution particulière

$y'' + 4y = \frac{x}{2}(e^{2ix} + e^{-2ix})$

$y'' + 4y = \frac{x}{2} e^{2ix}$

On pose $y = e^{2ix}(ax^2 + bx + c)$

$$\boxed{y_1 = e^{2ix}\left[\frac{-i}{16}x^2 + \frac{1}{32}x\right]}$$

$y'' + 4y = \frac{x}{2} e^{-2ix}$

$y_2 = \overline{y_1}$

$$\boxed{y_2 = e^{-2ix}\left[\frac{i}{16}x^2 + \frac{1}{32} \dots\right.}$$

* Solution complète

$$\boxed{y = y_0 + y_1 + y_2}$$

Ex : $y'' = -\omega^2 y$

$A \dots + B \dots$