Fonctions - Généralités

I) Composantes d'une étude de fonctions

Une étude de fonction (complète) comporte :

* L'étude du domaine de définition
* Le calcul de la dérivée
* La recherche d'extremum
* Le tableau de variations de la fonction (déduit du tableau de signes de la dérivée)
* Le calcul des limites , et définitions des asymptotes
* La représentation graphique

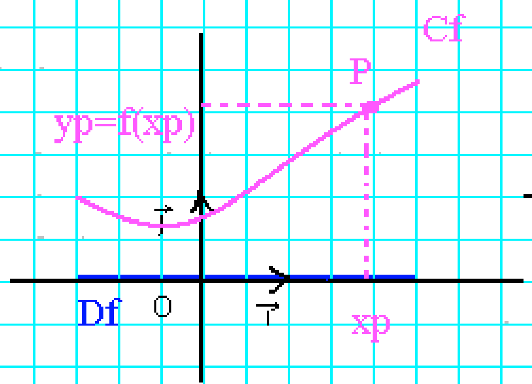
A ces éléments , on peut joindre une série d'analyses complémentaires (voir études de fonctions - compléments)

II) Analyse des éléments

1) La fonction

Une fonction est une transformation qui associe

$$\boxed{f : x \to f(x) = y \quad \text{pour } x \in Df}$$



x est l'antécédent de y = f (x)
y est l'image de x

Ainsi on construit une fonction f sur Df , en associant à chaque x de Df un seul réel image , noté f(x)

De même , le point P qui appartient à la courbe Cf , a pour coordonnées :

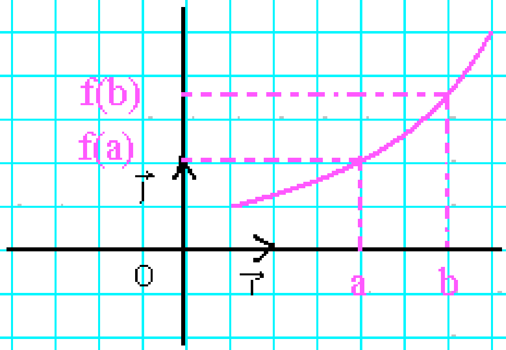
$\boxed{P (xp , yp)}$ avec yp = f(xp) puisque P ∈ Cf
$\boxed{P (xp , f(xp))}$

2) Le domaine de définition

Le domaine de définition de la fonction f(x) est noté Df .
Il comprend l'ensemble des réels x qui ont une image y définie (existante) par f

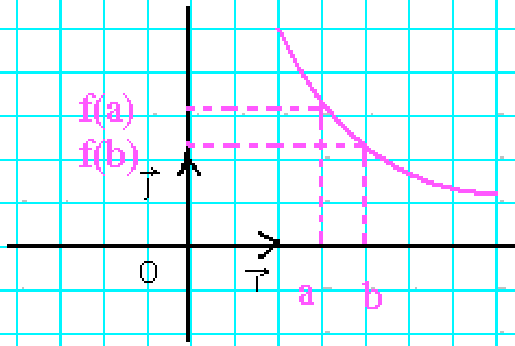
3) Analyse du sens de variations - dérivée

3a) Sens de variations



Une fonction est croissante si

$a < b$
$f(a) < f(b)$



Une fonction est décroissante si

$a < b$
$f(a) > f(b)$

On associe au sens de variations le taux de variations , défini par :

$$\boxed{\text{Tx var} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}}$$

Ainsi

$$\text{Tx var} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$\text{Tx var} = \frac{+}{+} = +$$

$$\text{Tx var} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

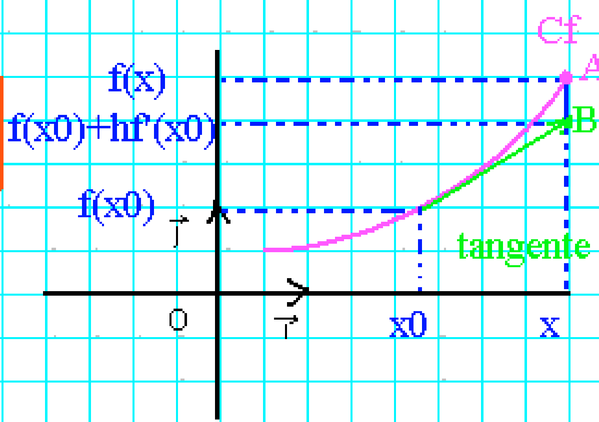
$$\text{Tx var} = \frac{-}{+} = -$$

$\Rightarrow$ Le signe du taux de variations donne les variations de la fonction

3b) Dérivée

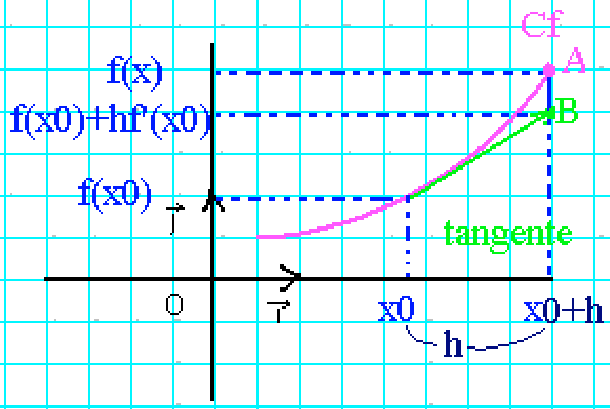
La dérivée en 1 point x_0 est donné par :

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\Delta y}{\Delta x}}$$



Δx représente une différence de x
Δy représente une différence de y

De même , en considérant une distance h qui tend vers 0 :



$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x0+h) - f(x_0)}{x0+h - x_0}$$

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x0+h) - f(x0)}{h}}$$

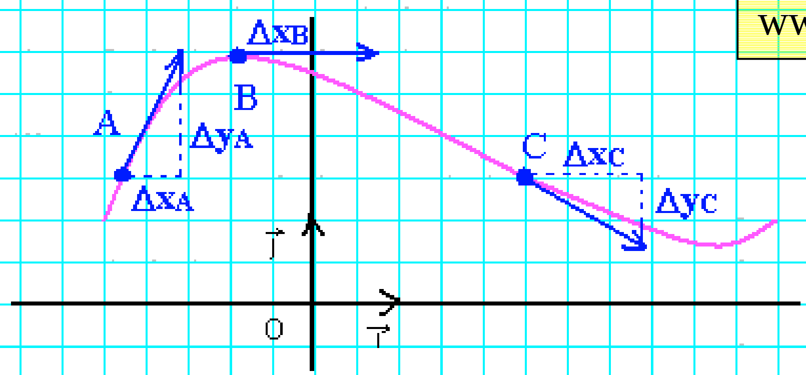
Dans les 2 cas , On retrouve la notion de taux de variations
La limite indique que la fonction est décomposée en une suite de petits segments [x0 , x] mis bout à bout.

Ainsi , si le vecteur tangent à une longueur qui tend vers 0 (c'est à dire que x est proche de x0 dans le 1er cas , que h soit proche de 0 dans le 2ème) , les points A et B vont être confondus .

Ainsi , localement , on peut avoir une approximation linéaire de la fonction f :

$$\boxed{f(x_0+h) = f(x_0) + h * f'(x_0)}$$

<u>Application</u> Soit la fonction suivante :



On calcule les dérivées en A : $f'(xA) = \frac{\Delta yA}{\Delta xA} = \frac{\oplus}{\oplus} = \oplus$

La fonction est ↗ aux abords de A

en B : $f'(xB) = \frac{\Delta yB}{\Delta xB} = \frac{0}{\oplus} = 0$

La fonction est ⟶ aux abords de B

en C : $f'(xC) = \frac{\Delta yC}{\Delta xC} = \frac{\ominus}{\oplus} = \ominus$

La fonction est ↘ aux abords de C

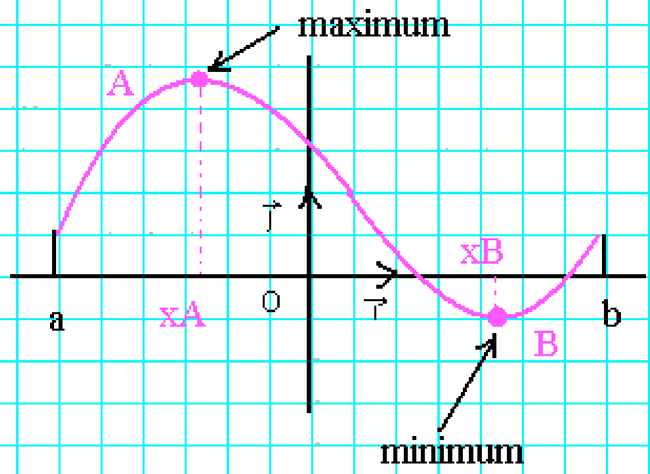
Le signe de la dérivée donne les variations de la fonction

La dérivée de f(x) par rapport à x se note donc f'(x) ou $\frac{\delta f}{\delta x}$
On doit donc étudier le signe de la dérivée après avoir déterminé cette dernière.
Pour la détermination des dérivées , se reporter aux chapitres :

* Fonctions polynomes
* Fonctions logarithmes
* Fonction exponentielles

4) Recherche d'extremum

Un extremum correspond localement , soit à un maximum , soit un minimum de la fonction



$$\begin{cases} \text{f admet un maximum en xA si } \forall x \in [\, a , b \,] , f(x) \leq f(xA) \\ \text{f admet un minimum en xB si } \forall x \in [\, a , b \,] , f(x) \geq f(xB) \end{cases}$$

Les abscisses des extremums sont déterminés en résolvant l'équation $\boxed{f'(x) = 0}$

5) Le tableau de variations

Les variations de la fonction sont obtenus après analyse du signe de la dérivée.

Le tableau de variations comporte au minimum , 3 niveaux

x		
f'	+	−
f	↗	↘

Signe de la dérivée

Variations de la fonction

Le tableau de variations est parfois couplé avec le tableau de signe de la dérivée.

Exemple

Étude d'une fonction polynôme :

Soit $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x - 1$, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Déterminons son sens de variation :

➔ Pour tout réel x on a $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x^2 - x - 2)$.

➔ On détermine le signe de $x^2 - x - 2$ en cherchant ses racines et on trouve -1 et 2.
$f'(x) = 6(x+1)(x-2)$ est positive sauf entre ses racines -1 et 2.

➔ On peut déterminer le signe de la dérivée et en déduire les variations de la fonction f :

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
variations de f	$-\infty$	↗	6	↘	-21	↗	$+\infty$

➔ f est croissante sur $]-\infty\,;-1\,]$ et sur $[\,2\,;+\infty\,[$ et décroissante sur $[\,-1\,;\,2\,]$.

6) Limites et asymptotes

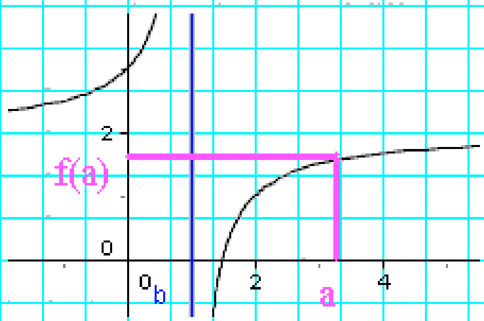
On détermine les limites aux bornes du domaine de définition.

• **Limite en 1 point défini (abscisse a) d'une fonction f(x)**

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = f(a)}$$

Dans ce cas , la limite correspond à l'image de a.

Retrouvez nous gratuitement sur www.fiches-land.eu

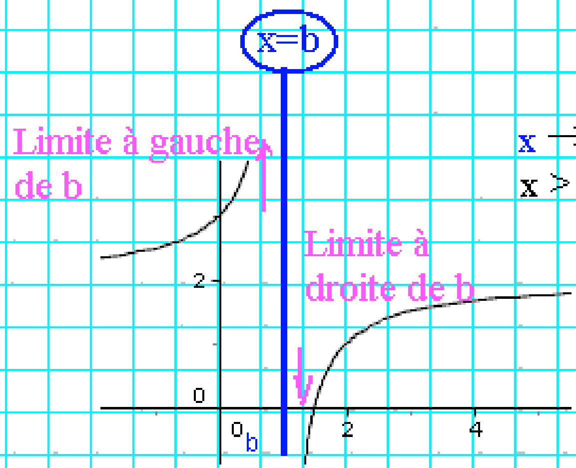


• **Limite en 1 point non défini (d'abscisse b) d'une fonction f(x)**

Puisque le point n'est pas défini , on détermine :

* La limite à gauche de b $\displaystyle\lim_{\substack{x \to b \\ x < b}} f(x)$

* La limite à droite de b $\displaystyle\lim_{\substack{x \to b \\ x > b}} f(x)$



$x \to b$
$x > b$

Pour celà , on remplace la valeurs des "x" de la fonction par b.

Asymptote :

Si $\boxed{\lim_{\substack{x \to b \\ x < b}} f(x) \text{ et / ou } \lim_{\substack{x \to b \\ x > b}} f(x) \text{ donne(nt) } + / - \infty}$, alors on a la

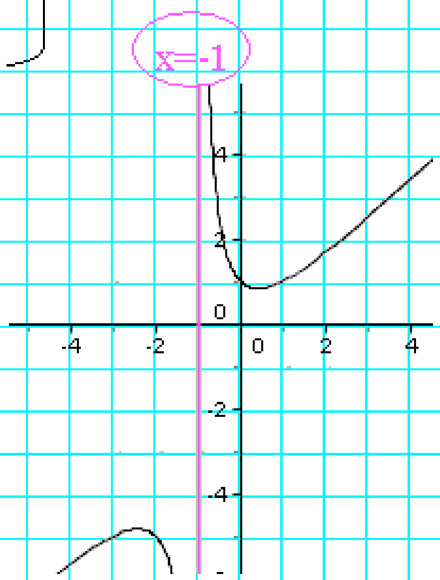
présence d'une $\boxed{\text{asymptote verticale d'équation } x=b}$

<u>ex :</u> $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x+1}$ $\quad Df = \mathbb{R}\backslash\{-1\}$

$$\lim_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} f(x) = \frac{(-1)^2 + 1}{-1 + 1} = \frac{2}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} f(x) = \frac{(-1)^2 + 1}{-1 + 1} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

La droite d'équation x=-1 est asymptote verticale à la courbe



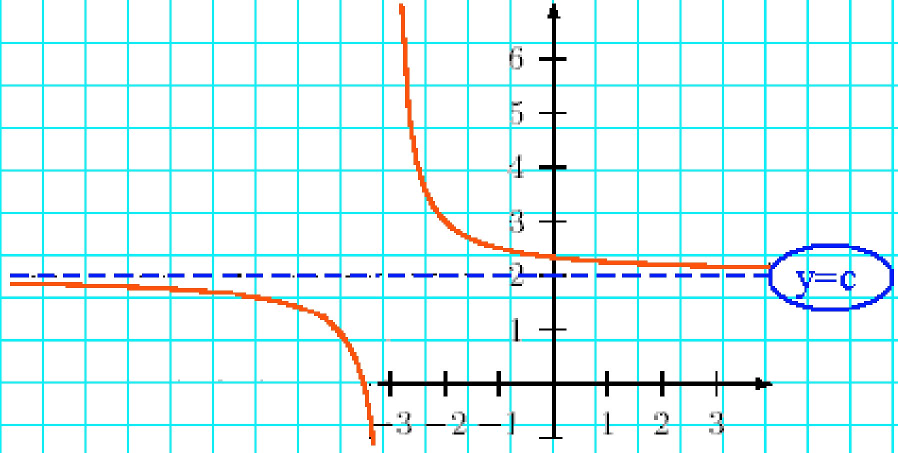
Retrouvez nous gratuitement sur www.fiches-land.eu

- <u>Limites en + / - ∞ d'une fonction f</u>

Pour ces limites , on remplace les valeurs des "x" par + / -   et on regarde les parties négligeables de la fonction.

Si $\boxed{\lim_{x \to -\infty} f(x) \text{ et / ou } \lim_{x \to +\infty} f(x) \text{ donne(nt) } C}$ avec $C \in \mathbb{R}$, alors on a

la présence d'une $\boxed{\text{asymptote horizontale d'équation } y=C}$

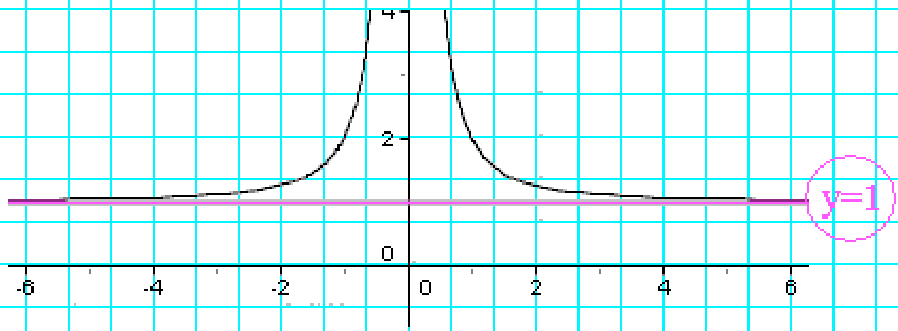


ex : $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2}$ Df = R* =]- ∞ , 0[∪]0 , + ∞[

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2}{x^2} = \lim\limits_{x \to -\infty} 1 = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} 1 = 1$

La droite d'équation y=1 est asymptote horizontale à la courbe



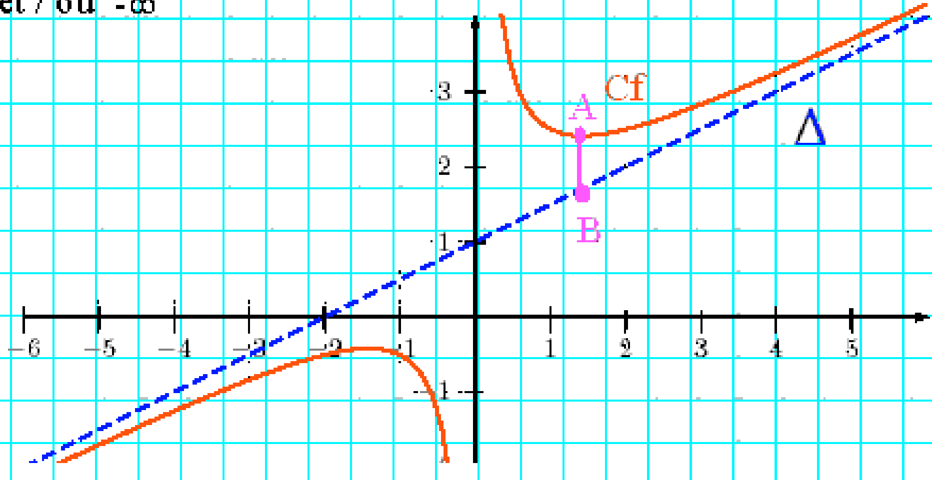
- Cas des asymptotes obliques

Pour démontrer que la droite Δ d'équation Δ : y = ax + b est asymptote oblique à la courbe Cf , représentative de la fonction f , il faut démontrer que :

$$\boxed{\lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - \Delta] = 0}$$

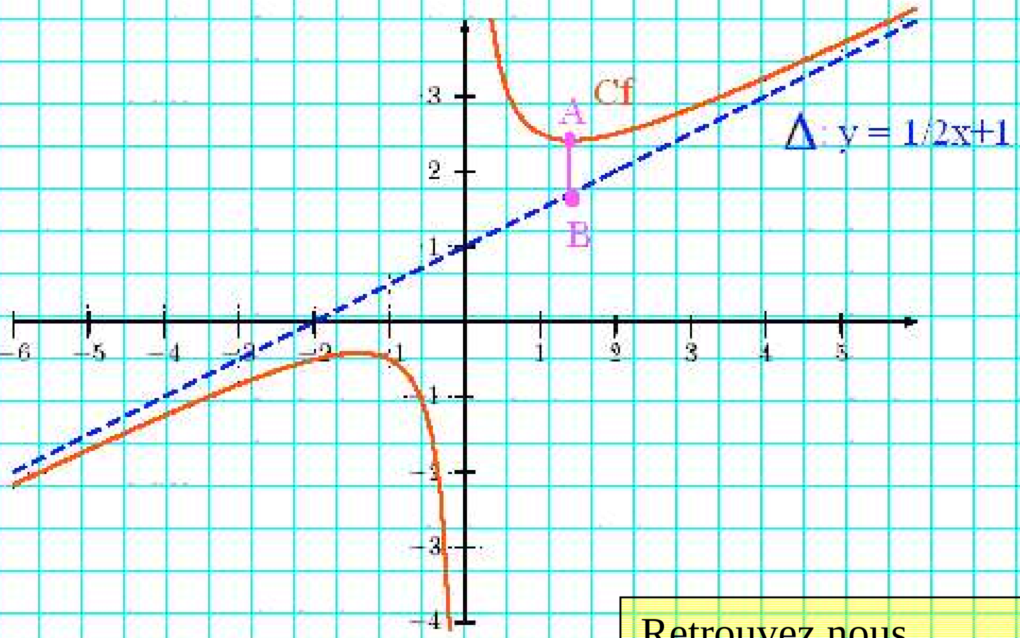
Cette propriété est valable en $+\infty$ et / ou $-\infty$

$f(x) - \Delta$ est représenté par [AB] : la distance AB tend vers 0 si x tend vers $+\infty$ et / ou $-\infty$



Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{2}x + 1$.



$\lim_{x\to+\infty} \left[f(x) - \left(\frac{1}{2}x+1\right)\right] = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{x}\right) = 0.$

La courbe admet une asymptote oblique d'équation $y = \frac{1}{2}x + 1$.

- **Principales opérations entre limites**

Somme

$\lim f$	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim g$	l'	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim (f+g)$	$l+l'$	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI

Exemple Calcul de « sommes » de limites :

➔ $\left.\begin{array}{lcl}\lim_{x\to0} e^x & = & 1\\ \lim_{x\to0} x^3 & = & 0\end{array}\right\}$ $\lim_{x\to0} (e^x + x^3) = 1.$

➔ $\left.\begin{array}{lcl}\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} & = & 0^-\\ \lim_{x\to-\infty} x^2 & = & +\infty\end{array}\right\}$ $\lim_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{x} + x^2\right) = +\infty$

➔ $\left.\begin{array}{lcl}\lim_{x\to+\infty} \ln x & = & +\infty\\ \lim_{x\to+\infty} x^2 & = & +\infty\end{array}\right\}$ $\lim_{x\to+\infty} (\ln x + x^2) = +\infty.$

➔ $\left.\begin{array}{lcl}\lim_{x\to-\infty} x & = & -\infty\\ \lim_{x\to-\infty} x^3 & = & -\infty\end{array}\right\}$ $\lim_{x\to-\infty} (x + x^3) = -\infty.$

➔ $\left.\begin{array}{lcl}\lim_{x\to-\infty} x^2 & = & +\infty\\ \lim_{x\to-\infty} x^3 & = & -\infty\end{array}\right\}$ $\lim_{x\to-\infty} (x^2 + x^3)$ est une forme indéterminée du type $\infty -$

Produit

$\lim f$	l	$l \neq 0$	$\pm\infty$	0
$\lim g$	l'	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\lim (f \times g)$	$l \times l'$	$*\infty$	$*\infty$	FI

Exemple Calcul de « produit » de limites :

➔ $\left.\begin{array}{lcr} \lim\limits_{x \to 0} (e^x + 3) & = & 4 \\ \lim\limits_{x \to 0} (e^x - 2) & = & -1 \end{array}\right\} \lim\limits_{x \to 0} [(e^x + 3) \times (e^x - 2)] = -4.$

➔ $\left.\begin{array}{lcr} \lim\limits_{x \to 0^+} (x - 3) & = & -3 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x} & = & +\infty \end{array}\right\} \lim\limits_{x \to 0^+} \left[(x - 3) \times \dfrac{1}{x}\right] = -\infty$

➔ $\left.\begin{array}{lcr} \lim\limits_{x \to -\infty} (x - 1) & = & -\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} x^3 & = & -\infty \end{array}\right\} \lim\limits_{x \to -\infty} [(x - 1) \times x^3] = +\infty.$

➔ $\left.\begin{array}{lcr} \lim\limits_{x \to -\infty} (x^2 + 1) & = & +\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x} & = & 0^- \end{array}\right\} \lim\limits_{x \to -\infty} \left[(x^2 + 1) \times \dfrac{1}{x}\right]$ est une forme indéterminée du type $0 \times \infty$

Quotient

$\lim f$	l	l	l	$\pm\infty$	$\pm\infty$	0
$\lim g$	$l' \neq 0$	$\pm\infty$	0	l'	$\pm\infty$	0
$\lim \left(\dfrac{f}{g}\right)$	$\dfrac{l}{l'}$	0	$*\infty$	$*\infty$	FI	FI

Exemple Calcul de « quotients » de limites :

➔ $\left.\begin{array}{lcr} \lim\limits_{x \to 0} (e^x + 3) & = & 4 \\ \lim\limits_{x \to 0} e^x - 2) & = & -1 \end{array}\right\} \lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{e^x + 3}{e^x - 2}\right) = e^5.$

➔ $\left.\begin{array}{lcr} \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{1}{x} - 3\right) & = & -3 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} x^2 & = & +\infty \end{array}\right\} \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{\frac{1}{x} - 3}{x^2}\right) = 0^-.$

➔ $\left.\begin{array}{lcr} \lim\limits_{x \to 0^+} x - 4 & = & -4 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} x & = & 0^+ \end{array}\right\} \lim\limits_{x \to 0^+} \left(\dfrac{x - 4}{x}\right) = -\infty.$

➔ $\left.\begin{array}{lcr} \lim\limits_{x \to 0^+} \ln x & = & -\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} (x - 1) & = & -1 \end{array}\right\} \lim\limits_{x \to 0^+} \left(\dfrac{\ln x}{x - 1}\right) = +\infty.$

➔ $\left.\begin{array}{lcr} \lim\limits_{x \to -\infty} (x - 1) & = & -\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} x^3 & = & -\infty \end{array}\right\} \lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{x - 1}{x^3}\right)$ est une forme indéterminée.

➔ $\left.\begin{array}{lcr} \lim\limits_{x \to 0} x^2 & = & 0 \\ \lim\limits_{x \to 0} \sqrt{x} & = & 0 \end{array}\right\} \lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{x^2}{\sqrt{x}}\right)$ est une forme indéterminée .

« FI » désigne une Forme Indéterminée, c'est à dire qu'on ne sait pas calculer par une opération élémentaire.

Traitement des formes indéterminées

Dans ce cas, toutes les situations sont *a priori* possibles : existence d'une limite finie, nulle ou non ; existence d'une limite infinie ; absence de limite.
Seule une étude particulière permet de lever l'indétermination.

Rappelons pour commencer les cas d'indétermination des limites :

$\lim f(x)$	$\lim g(x)$	Limite indéterminée	type d'indétermination
$+\infty$	$-\infty$	$f(x)+g(x)$	$\infty-\infty$
0	$\pm\infty$	$f(x)\times g(x)$	$0\times\infty$
0	0	$\dfrac{f(x)}{g(x)}$	$\dfrac{0}{0}$
$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\dfrac{f(x)}{g(x)}$	$\dfrac{\infty}{\infty}$

Exemple
Indétermination du type « $\infty-\infty$ » :

➔ $\left.\begin{array}{lll}\lim\limits_{x\to+\infty} 3x^2 & = & +\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty} -x & = & -\infty\end{array}\right\}$ $\lim\limits_{x\to+\infty}(3x^2-x)$ est une forme indéterminée du type $\infty-\infty$.

➔ On met x^2 en facteur : $f(x)=3x^2-x=x^2\left(3-\dfrac{1}{x}\right)$.

➔ $\left.\begin{array}{lll}\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 & = & +\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty} \left(3-\dfrac{1}{x}\right) & = & 1\end{array}\right\}$ d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

Remarque 2
De manière générale, le comportement d'une fonction polynomiale en $\pm\infty$ est dictée p le comportement de son terme de plus haut degré en $\pm\infty$.

Exemple
Indétermination du type « $\dfrac{\infty}{\infty}$ » :

➔ $\left.\begin{array}{lll}\lim\limits_{x\to+\infty} (x^2+2x+1) & = & +\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty} (2x^2-3) & = & +\infty\end{array}\right\}$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+2x+1}{2x^2-3}\right)$ est une forme indéterminée du type « $\dfrac{\infty}{\infty}$ »

➔ Pour $x\neq 0$, on factorise par la puissance de x maximale et on simplifie :

$$f(x)=\frac{x^2+2x+1}{2x^2-3}=\frac{x^2\left(1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(2-\dfrac{3}{x^2}\right)}=\frac{1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}}{2-\dfrac{3}{x^2}}.$$

➔ $\left.\begin{array}{lll}\lim\limits_{x\to+\infty} (1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}) & = & 1\\ \lim\limits_{x\to+\infty} (2-\frac{3}{x^2}) & = & 2\end{array}\right\}$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\dfrac{1}{2}$.

Remarque 3

De manière générale, le comportement d'une fraction rationnelle en $\pm\infty$ est dictée par le comportement du quotient des deux termes de plus haut degré.

Exemple

Indétermination du type « $0 \times \infty$ » :

➔ $\left.\begin{array}{lcl} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} & = & 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} (x^2+1) & = & +\infty \end{array}\right\}$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\dfrac{1}{x}(x^2+1)\right]$ est une forme indéterminée du type « $0 \times \infty$ ».

➔ On développe : $f(x) = \dfrac{1}{x}(x^2+1) = x + \dfrac{1}{x}$

➔ $\left.\begin{array}{lcl} \lim\limits_{x \to +\infty} x & = & +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} & = & 0^+ \end{array}\right\}$ d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Retrouvez nous gratuitement sur www.fiches-land.eu

Exemple

Indétermination du type « $\dfrac{0}{0}$ » :

➔ $\left.\begin{array}{lcl} \lim\limits_{x \to 1} (x^2-1) & = & 0 \\ \lim\limits_{x \to 1} (x-1) & = & 0 \end{array}\right\}$ $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{x^2-1}{x-1}\right)$ est une forme indéterminée du type $\dfrac{0}{0}$.

➔ On factorise : $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1} = \dfrac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x+1$.

➔ $\lim\limits_{x \to 1} (x-1) = 0$ donc : $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 0$.

Généralement , on simplifie ces FI en mettant en facteur l'expression la plus dont la valeur est la plus importante.

7) Représentation graphique

On appelle courbe représentative de f l'ensemble des points M(x,y) tels que x $\in$Df et y = f(x).

Pour faciliter le tracé , il est conseillé de reporter dans un 1er temps ,dans le repère orthonormé : - Les extremums

- Les asymptotes