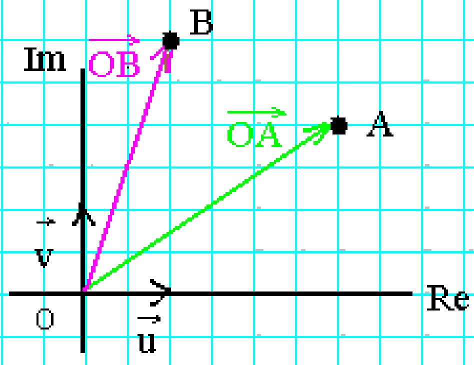
Représentation géométrique des nombres complexes

I) Relations nombres complexes - Vecteurs

1) Représentation vectorielle

Faire des opérations entre nombres complexes , équivaut , en terme géométrique , à effectuer des opérations entre vecteurs :



Ainsi , on a les relations :

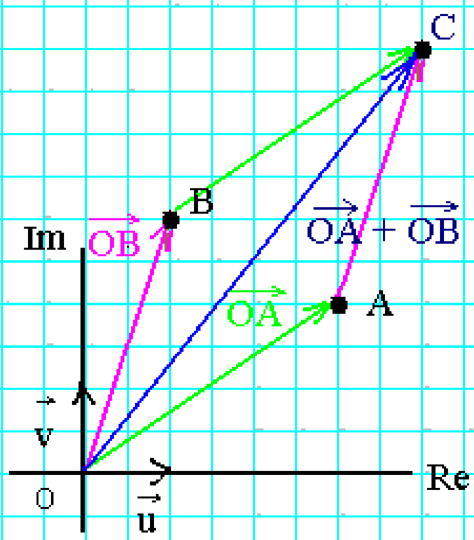
$$\boxed{\begin{array}{l} \underline{Z_A} = (\underline{Z_A} - \underline{Z_O}) \approx \overrightarrow{OA} \\ \underline{Z_B} = (\underline{Z_B} - \underline{Z_O}) \approx \overrightarrow{OB} \end{array}}$$

De même , au niveau des normes / distances :

$$\boxed{\begin{array}{l} |\underline{Z_A}| = |\underline{Z_A} - \underline{Z_O}| \approx \|\overrightarrow{OA}\| \\ |\underline{Z_B}| = |\underline{Z_B} - \underline{Z_O}| \approx \|\overrightarrow{OB}\| \end{array}}$$

2) Opérations vectorielles

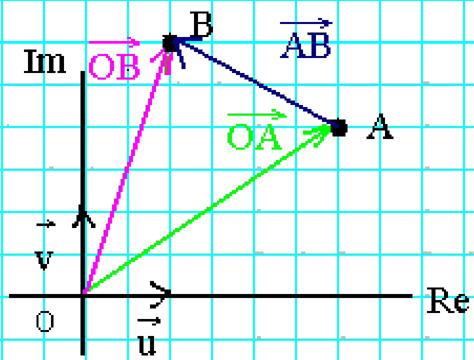
a) Somme de nombres complexes



$$\underline{Z_A} + \underline{Z_B} = (\underline{Z_A} - \underline{Z_0}) + (\underline{Z_B} - \underline{Z_0}) \approx \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$$

Le point C a pour affixe $\underline{Z_C} = \underline{Z_A} + \underline{Z_B}$

b) Différence de nombres complexes



$$\begin{aligned} \underline{Z_B} - \underline{Z_A} = (\underline{Z_B} - \underline{Z_0}) - (\underline{Z_A} - \underline{Z_0}) &\approx \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} \\ &\approx \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AO} \\ &\approx \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} \\ &\approx \overrightarrow{AB} \end{aligned}$$

$$\boxed{\underline{Z_B} - \underline{Z_A} \approx \overrightarrow{AB}}$$

De même $\boxed{|\underline{Z_B} - \underline{Z_A}| \approx \|\overrightarrow{AB}\|}$

c) Vecteurs colinéaires

2 vecteurs $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires si on a la relation $\overrightarrow{CA} = \lambda\ \overrightarrow{CD}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$

En écriture complexe , on a donc $(\underline{Z_A} - \underline{Z_C}) = \lambda (\underline{Z_D} - \underline{Z_C})$

3) Transformations planes

Transformation	De centre Ω (d'affixe $\underline{z_\omega}$)
Homothétie	$\underline{Z_P}' - \underline{z_\omega} = k\,(\underline{z_P} - \underline{z_\omega})$
Rotation d'angle α	$\underline{Z_P}' - \underline{z_\omega} = e^{i*\alpha}\,(\underline{z_P} - \underline{z_\omega})$
Similitude $k\alpha$	$\underline{Z_P}' - \underline{z_\omega} = k * e^{i*\alpha}\,(\underline{z_P} - \underline{z_\omega})$
Translation $T = u + iv$	$\underline{Z_P}' = \underline{z_P} + T$

Avec $\underline{Z_P}'$ image de $\underline{Z_P}$ après transformation

Remarque : Si le centre de transformation est O , on a alors $\underline{Z_\omega} = \underline{Z_O} = 0 + 0i$

Ex : Rotation de centre $z_\omega = 2+3i$ et d'angle $\alpha = \Pi/2$ du point $z_P = 3+4i$

$Z_P' - z_\omega = e^{i*\alpha}\,(z_P - z_\omega)$

$Z_P' - (2+3i) = (\cos(\Pi/2) + i \sin(\Pi/2))\,((3+4i)-(2+3i))$

$Z_P' - (2+3i) = (i)\,(1 + i)$

$Z_P' - (2+3i) = (-1 + i)$

$Z_P' = (-1 + i) + (2+3i)$

$Z_P' = (1 + 4i)$