Loi normale

La loi normale intervient dans la modélisation de phénomènes aléatoires possédant des causes indépendantes . Elle intervient dans le cas de distributions gaussiennes.

I) Loi normale

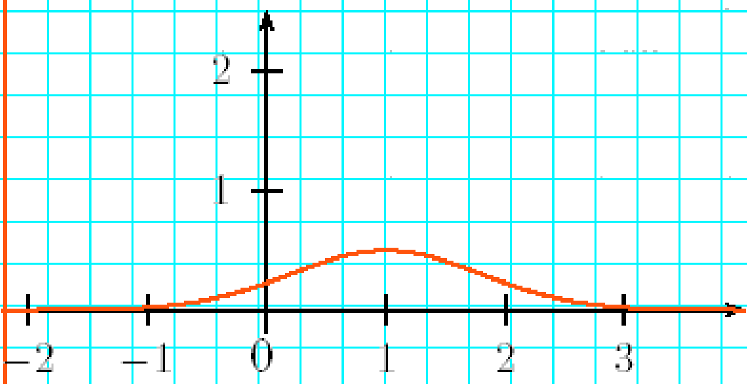
La loi normale de paramètre m ∈ R et σ > 0 , notée $\mathcal{N}(m;\sigma)$, est la loi de probabilité d'une variable aléatoire continue à valeurs réelles , de densité de probabilité la fonction définie sur R par :

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2}}$$

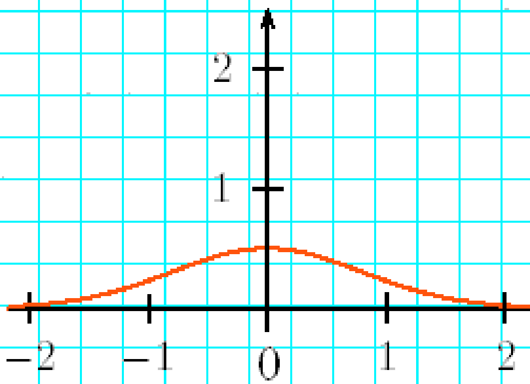
Avec m : moyenne de la distribution (critère de position : définit la position de la courbe par rapport à l'origine)

σ : écart type (critère de forme : définit l'allure de la courbe)

Influence du facteur de position m

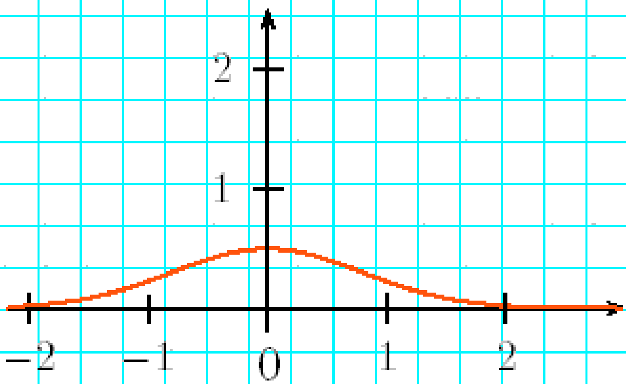


$m = 1$



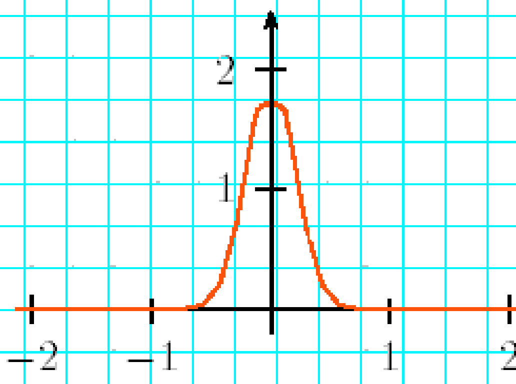
$m = 0$

Influence du facteur de forme σ



$m = 0$ et $\sigma = 0.8$

σ grand



$m = 0$ et $\sigma = 0,2$

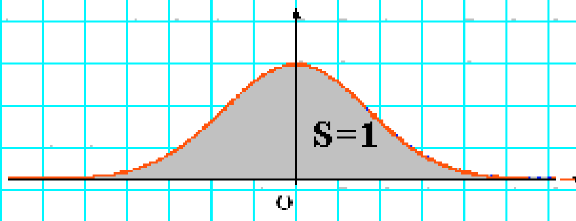
σ petit

Propriétés :

- $E(X) = \mu$
- $V(X) = \sigma^2$
- $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sigma$

Remarque : Come toute loi de probabilité concernant des variables aléatoires continues , la fonction f(x) est soumise à la condition de densité de probabilité . Ainsi :

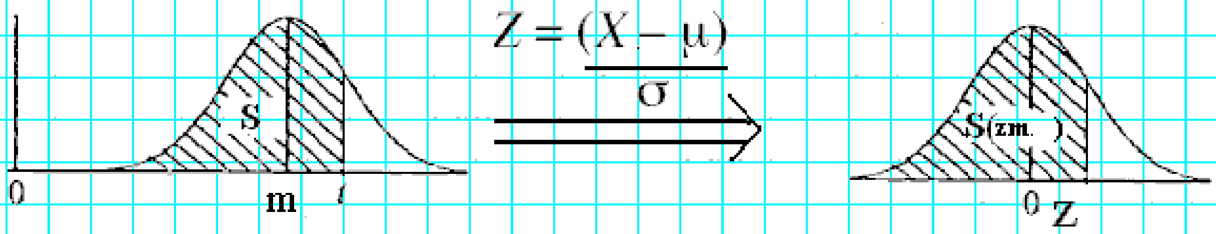
$$\boxed{\int_{\text{Domaine}} f(x)\, dx = 1}$$



II) Loi normale centrée réduite

Si une variable aléatoire suit la loi normale $\mathcal{N}(m;\sigma)$ alors la variable aléatoire $Z = \dfrac{(X-m)}{\sigma}$ Suit la normale centrée réduite $\mathcal{N}(0\ ;1)$

Celà revient à effectuer un changement de repère pour placer l'origine au niveau de la moyenne m :



En effectuant le changement de variable $Z = \dfrac{(X-m)}{\sigma}$ on obtient une variable aléatoire Z dont la loi est donnée par la densité de probabilité :

$$\boxed{f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} z^2}}$$

La loi normale centrée réduite , comme la loi normale , est soumise à la condition de densité de probabilité , c'est à dire que la surface comprise entre la fonction f(Z) et l'axe des abscisses vaut 1.

Propriétés :

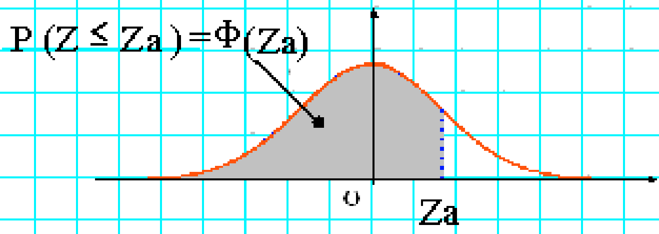
- $E(X) = 0$
- $V(X) = 1$
- $\sigma(X) = 1$

III) Fonction de répartition(= fonction de probabilité cumulative $\Phi(Z)$)

Après changement de variable ,$\Phi(Za)$ définit l'aire (= la probabilité) située entre la courbe f(Z) et l'axe des x , située entre $-\infty$ et Za

- Ainsi :

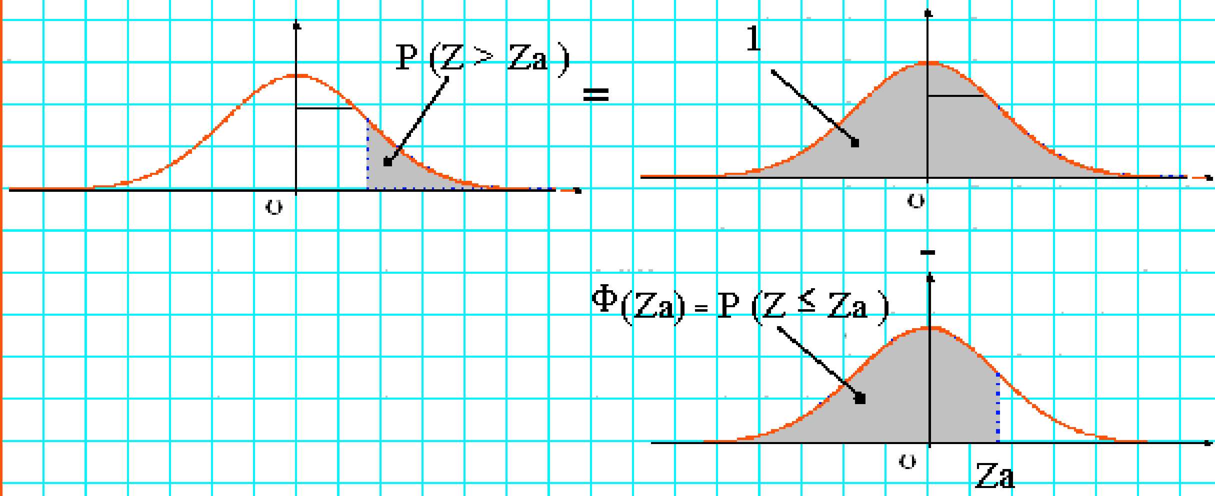
$$\boxed{\Phi(Za) = \int_{-\infty}^{Za} f(z)\,dz = P(Z \leq Za)}$$



Retrouvez nous gratuitement sur www.fiches-land.eu

- De même

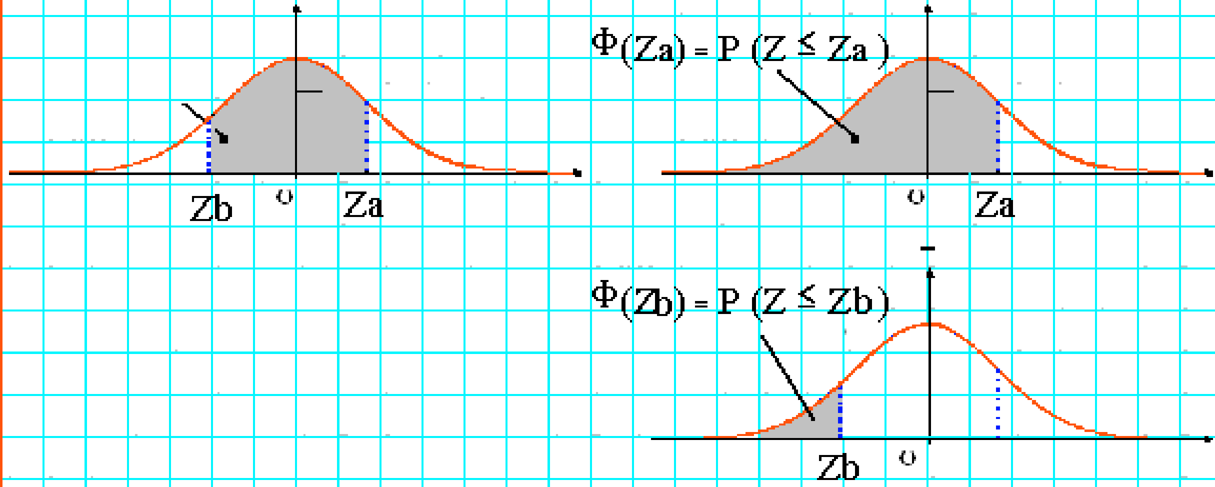
$$\boxed{P(Z > Za) = 1 - P(Z \leq Za)}$$



NB : Si $Z < 0$, $P(Z) = 1 - P(-Z)$

Ex : $P(-1) = 1 - P(1)$

- De la même façon $\boxed{P(Zb \leq Z \leq Za) = P(Z \leq Za) - P(Z \leq Zb) = \Phi(Za) - \Phi(Zb)}$



La valeur de $\Phi(Z)$ est donnée par l' abaque de la distribution gaussienne réduite.

IV) Opérations sur des variables aléatoires

Si X_1 et X_2 sont 2 variables aléatoires indépendantes suivant respectivement les lois normales $\mathcal{N}(m_1, \sigma_1)$ et $\mathcal{N}(m_2, \sigma_2)$, alors :

$X_1 + X_2$ suit la loi normale $\mathcal{N}\left(m_1 + m_2, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}\right)$

$X_1 - X_2$ suit la loi normale $\mathcal{N}\left(m_1 - m_2, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}\right)$