Les nombres complexes

L'espace complexe se note $\mathbb{C}$. On peut effectuer dans cet espace les mêmes opérations que dans $\mathbb{R}$

Cet espace est tel que $\boxed{i^2 = -1}$

Retrouvez nous gratuitement sur www.fiches-land.eu

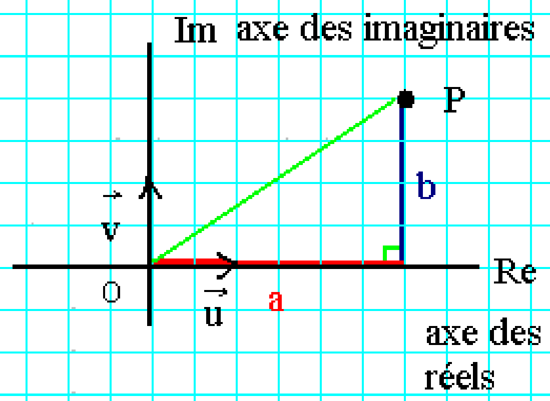
I) Les différentes représentations d'un nombre complexe

Un nombre complexe peut se représenter sous différentes formes :

1) Forme algébrique

Elle correspond à la représentation cartésienne

Un point P peut se représenter sous forme :

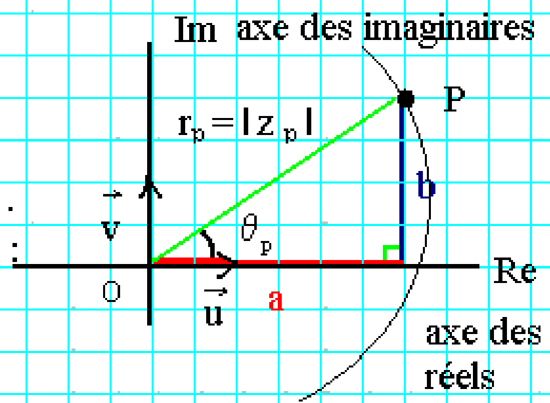


$$\boxed{\underline{z}_p = a + ib}$$

Le réel a est la partie réelle de $\underline{z}_p$
Le réel b est la partie imaginaire de $\underline{z}_p$

2) Forme trigonométrique (ou forme polaire)

Le point P peut également se mettre sous forme polaire , c'est à dire qu'il peut être obtenu à partir d'un cercle centré sur O et d'un rayon r . On a alors ;



$$\boxed{\underline{z}_p = [\, r_p \,, \theta_p \,]}$$

$r_p = |\underline{z}_p|$ est nommé module de $\underline{z}_p$ et correspond au rayon r du cercle .

On l'obtient à partir du thèorème de Pythagore :

$$\boxed{|\underline{z}_p| = r_p = \sqrt{a^2 + b^2}}$$

θ_p est nommé argument de $\underline{z}_p$ et correspond à l'angle entre l'axe horizontal et la droite (OP).On le détermine à partir des propriétés trigonométriques dans le triangle :

$$\left.\boxed{\begin{array}{l} \sin \theta_p = \dfrac{\text{coté opp}}{\text{Hypothénuse}} = \dfrac{b}{r} \\[2em] \cos \theta_p = \dfrac{\text{coté adj}}{\text{Hypothénuse}} = \dfrac{a}{r} \end{array}}\right\} \quad \text{On en déduit } \theta_p$$

Ou encore

$$\boxed{\tan \theta_p = \frac{\text{coté opp}}{\text{coté adj}} = \frac{b}{a}}$$

<u>Remarque :</u>

$\underline{z}_p = [\, r_p , \theta_p \,]$ peut se développer sous la forme $\underline{z}_p = r_p\,(\cos \theta p + i \sin \theta p\,)$

<u>3) Forme exponentielle</u>

A partir du module et argument développée en 2) en peut représenter le point P ainsi :

$$\boxed{\underline{z}_p = r_p\, e^{i\theta p}}$$

<u>NB</u> : De ce fait , i peut aussi s'écrire $e^{i\Pi/2}$

<u>Nota : Passage d'une forme à l'autre</u>

Forme algébrique : $\boxed{\underline{z}_p = a + ib}$

$r_p = \sqrt{a^2 + b^2}$

$$\theta p \begin{cases} \cos \theta_p = a / r \\ \sin \theta_p = b / r \end{cases}$$

$a = r \cos\ \theta_p$

$b = r \sin\ \theta_p$

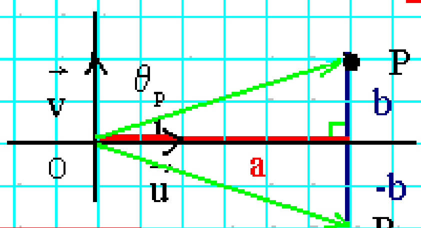
Forme trigonométrique : $\boxed{\underline{z}_p = [\, r_p , \theta_p \,]} = r_p\,(\cos \theta p + i \sin \theta p\,)$

Forme exponentielle : $\boxed{\underline{z}_p = r_p\, e^{i\theta p}}$

<u>II) Notions complémentaires</u>

Le conjugué de $\underline{Z}_p = a+ib$
$= [\, r_p , \theta_p \,]$ est noté $\overline{Zp}$ est a pour valeur $\boxed{\overline{\underline{Z}_p} = a-ib = [\, r_p , -\theta_p \,]}$

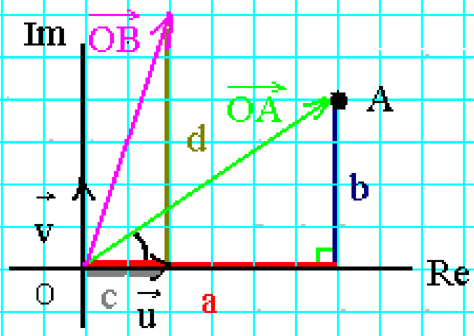
P représente le point symétrique de P par rapport à l'axe des x .



Le conjugué est tel que $\boxed{\underline{Z}_p * \overline{\underline{Z}_p} = a^2 + b^2}$

III) Opérations sur les nombres complexes

Faire des opérations entre nombres complexes , équivaut , en terme géométrique , à effectuer des opérations entre vecteurs :



Ainsi :

$$\underline{Z_A} = a+ib = [\, r_A \,,\, \theta_A \,] \approx (\, \underline{Z_A} - \underline{Z_O} \,) \approx \overrightarrow{OA}$$

$$\underline{Z_B} = c+id = [\, r_B \,,\, \theta_B \,] \approx (\, \underline{Z_B} - \underline{Z_O} \,) \approx \overrightarrow{OB}$$

1) Addition - soustraction

* Forme algébrique : $\underline{Z_A} + \underline{Z_B} = (a+c) + i\,(b+d)$

2) Produit

* Forme algébrique : $\underline{Z_A} * \underline{Z_B} = (a+ib) * (c+id)$ On distribue les termes

* Forme trigonométrique $\underline{Z_A} * \underline{Z_B} = [\, r_A \,,\, \theta_A \,] * [\, r_B \,,\, \theta_B \,] = [r_A * r_B \,,\, \theta_A + \theta_B \,]$

* Forme exponentielle $\underline{Z_A} * \underline{Z_B} = r_A\, e^{i\theta A} = r_B\, e^{i\theta B} = r_A * r_B\, e^{i(\theta A + \theta B)}$

3) Division

* Forme algébrique :

$$\frac{\underline{Z_A}}{\underline{Z_B}} = \frac{(\,a+ib\,)}{(\,c+id)} = \frac{(\,a+ib\,) * (\,c-id\,)}{(\,c+id\,) * (\,c-id\,)}$$

$$= \frac{(\,ac\text{-}bd\,) + i\,(\,bc - ad\,)}{c^2+d^2} = \frac{(\,ac\text{-}bd\,)}{c^2+d^2} + \frac{i\,(\,bc-ad\,)}{c^2+d^2}$$

On multiplie par le conjugué de Zb au numérateur et dénominateur pour retirer la partie imaginaire du dénominateur

* Forme trigonométrique

$$\frac{\underline{Z_A}}{\underline{Z_B}} = \frac{[\, r_A \,,\, \theta_A \,]}{[\, r_B \,,\, \theta_B \,]} = [\, r_A / r_B \,,\, \theta_A \text{-} \theta_B \,]$$

* Forme exponentielle

$$\frac{\underline{Z_A}}{\underline{Z_B}} = \frac{r_A\, e^{i\theta A}}{r_B\, e^{i\theta B}} = (r_A / r_B) e^{i(\theta A - \theta B)}$$

4) Puissance

* Forme algébrique : $\underline{Z_A}^n = (\, a+ib\,)^n$ On développe

* Forme trigonométrique $\underline{Z_A}^n = [\, r_A \,,\, \theta_A \,]^n = [\, r_A^{\,n} \,,\, n * \theta_A \,]$ Formule de Moivre

IV) Formules d'Euler

Pour tout nombre réel θ , on a : $e^{i\theta} = (\cos\theta + i\sin\theta)$

$e^{-i\theta} = (\cos\theta - i\sin\theta)$

Par addition et soustraction terme à terme , on obtient :

$$\boxed{\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}} \qquad \boxed{\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}}$$

V) Application : Equation de 2nd degré

On applique , pour résoudre une équation de la forme $az^2 + bz + c = 0$, la meme méthode que dans R

Ex : $z^2 - z + 1 = 0$ $\qquad \Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4*(1)*(1) = -3 = 3i^2$

$$z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 - \sqrt{3i^2}}{2} = \frac{1 - \sqrt{3}\,i}{2}$$

$$z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 + \sqrt{3i^2}}{2} = \frac{1 + \sqrt{3}\,i}{2}$$

Remarque : z_1 et z_2 sont toujours des solutions conjuguées