Nombres complexes - Résumé

NOMBRES COMPLEXES

$a+ib$ $(a+ib)(a-ib)$ a^2+b^2

$\boxed{z = x + j y}$ $\boxed{j^2 = -1}$ $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$

$\mathbb{C}$ a une structure de corps (on peut mettre en fact., developper, etc... comme dans $\mathbb{R}$)

Egalité $x + jy = x' + jy' \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$

Somme
$(x+jy) + (x'+jy') = (x+x') + j(y+y')$

Produit
on développe (avec $j^2 = -1$)

Quotient
on multiplie numérat. et dénom. par l'expression conjuguée du dénom.

$\frac{3+j}{2-j} = \frac{(3+j)(2+j)}{(2-j)(2+j)} = \frac{5+5j}{5} = 1+j$

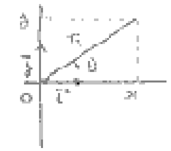
Complexe conjugué $\bar{z} = x - jy$

propriétés : $\overline{z z'} = \bar{z}\,\bar{z}'$; $\overline{z+z'} = \bar{z} + \bar{z}'$; $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'}$

z réel $\Leftrightarrow z = \bar{z}$

Module et Argument

$\boxed{\begin{matrix} x = R\cos\theta \\ y = R\sin\theta \end{matrix}}$ $\boxed{\begin{matrix} R = \sqrt{x^2+y^2} \\ \cos\theta = \frac{x}{R} \\ \sin\theta = \frac{y}{R} \end{matrix}}$



$\theta = \arctan \frac{y}{x}$

notations : $\boxed{z = [R, \theta]}$
$\boxed{z = R(\cos\theta + j\sin\theta)}$
$\boxed{z = R\, e^{j\theta}}$

Produit $\boxed{\begin{matrix}\text{on multiplie les modules} \\ \text{on additionne les arguments}\end{matrix}}$

$[R, \theta] \times [R', \theta'] = [RR', \theta + \theta']$

ou : $R e^{j\theta} \cdot R' e^{j\theta'} = RR' e^{j(\theta+\theta')}$

Quotient
$\frac{[R, \theta]}{[R', \theta']} = \left[\frac{R}{R'}, \theta - \theta'\right]$ ou : $\frac{R e^{j\theta}}{R' e^{j\theta'}} = \frac{R}{R'} e^{j(\theta-\theta')}$

Puissances
$[R, \theta]^n = [R^n, n\theta]$ ou : $(R e^{j\theta})^n = R^n e^{jn\theta}$

Formule de Moivre
c'est la formule ci-dessus avec $R = 1$
$[1, \theta]^n = [1, n\theta]$

soit : $\boxed{(\cos\theta + j\sin\theta)^n = \cos n\theta + j \sin n\theta}$

ou : $(e^{j\theta})^n = e^{jn\theta}$

Racines $n^{\text{ièmes}}$

On cherche z tel que $z^n = Z = [R, \theta]$

on a : $\boxed{|z| = \sqrt[n]{R}}$ $\boxed{\arg(z) = \frac{\theta}{n} + k\frac{2\pi}{n}}$

L'argument θ étant défini à $k\,2\pi$ près, lorsqu'on le divise par n, le resultat est determiné à $k\frac{2\pi}{n}$ près

$\boxed{\text{Il y a donc } n \text{ racines } n^{\text{ièmes}}}$

Ex : Racines cubiques de 1

$z^3 = 1 = [1, 0]$ donc : $|z| = \sqrt[3]{1} = 1$, $\arg(z) = k\frac{2\pi}{3}$

Trois racines cubiques : $z_1 = [1, 0] = 1$
$z_2 = [1, \frac{2\pi}{3}] = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}$
$z_3 = [1, \frac{4\pi}{3}] = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}$

Racines carrées (sous forme algébrique)

soit $z = x + jy$ tel que $z^2 = a + jb$

$\boxed{z^2 = a + jb \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = \sqrt{a^2+b^2} \\ x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases}}$

pour faciliter la résolution, on ajoute la propriété : $|z^2| = |a + jb|$

par Somme et différence, on trouve x^2 et y^2 d'où : 4 couples (x, y)
Compte tenu du signe de $2xy = b$, seuls deux de ces couples sont solution.

Equation du second degré

$a z^2 + b z + c = 0$ $z \in \mathbb{C}$ z inconnue, $a \in \mathbb{C}$ $b \in \mathbb{C}$ $c \in \mathbb{C}$

$\Delta = b^2 - 4ac$ on cherche δ et $-\delta$ les deux racines carrées de Δ

attention le symbole "$\sqrt{\ }$" est réservé aux réels positifs

$\boxed{z_1 = \frac{-b+\delta}{2}}$ $\boxed{z_2 = \frac{-b-\delta}{2}}$

Formule d'Euler

$\boxed{\cos\theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}}$

$\boxed{\sin\theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}}$

Linéarisation

1. On transforme en exp. par Euler
2. On développe
3. On retransforme en cos ou sin. par Euler

Ex : $\cos^3\theta = \left(\frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}\right)^3$

$= \frac{1}{2^3}\left(e^{3j\theta} + 3e^{j\theta} + 3e^{-j\theta} + e^{-3j\theta}\right)$

$= \frac{1}{4}\cos 3\theta + \frac{3}{4}\cos\theta$

Remarque j est la notation des physiciens, les mathématiciens utilisent i

J.G.