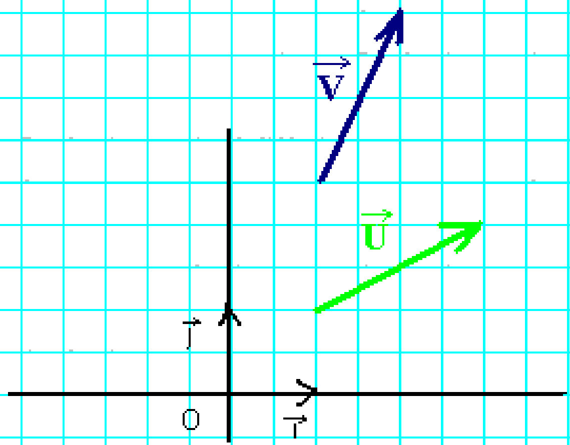
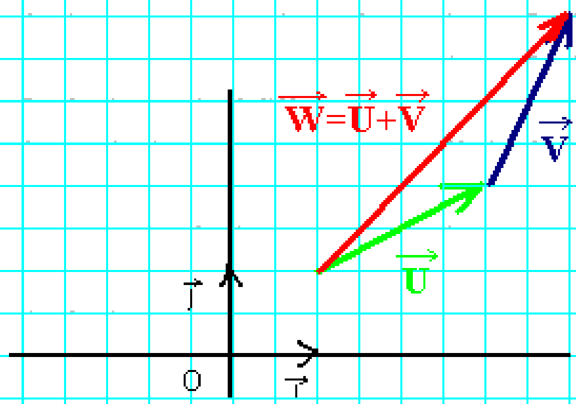
Opérations sur les vecteurs

I) Somme de vecteurs

Faire une somme de vecteurs revient à les mettre bout à bout.
Le vecteur résultant de la somme est alors le vecteur le plus direct :
- Il a pour origine l'origine du 1er vecteur
- Il a pour arrivée l'arrivée du dernier vecteur

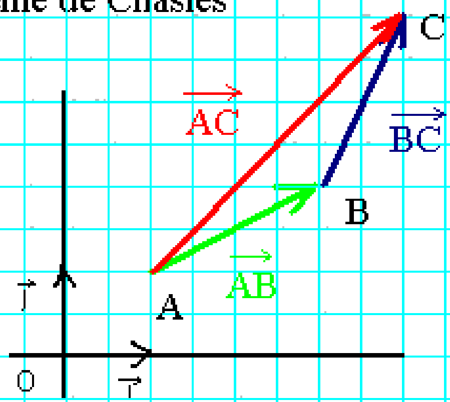




Ainsi : $\vec{U} = \begin{vmatrix} U_x \\ U_y \end{vmatrix}$ **et** $\vec{V} = \begin{vmatrix} V_x \\ V_y \end{vmatrix}$ **donnent alors** $\vec{W} = \begin{vmatrix} W_x \\ W_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} U_x + V_x \\ U_y + V_y \end{vmatrix}$

Remarque :

Si l'on effectue la somme de 2 vecteurs dont l'origine du 2ème correspond à la destination du 1er (ils opnt donc un point commun) , on peut appliquer le théorème de Chasles



Théorème de Chasles :

$$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$$

Retrouvez nous gratuitement sur www.fiches-land.eu

II) Produit scalaire

Le produit scalaire de 2 vecteurs $\vec{U} = \begin{vmatrix} U_x \\ U_y \end{vmatrix}$ et $\vec{V} = \begin{vmatrix} V_x \\ V_y \end{vmatrix}$ est un nombre et se note $\vec{U}.\vec{V}$

On a alors :

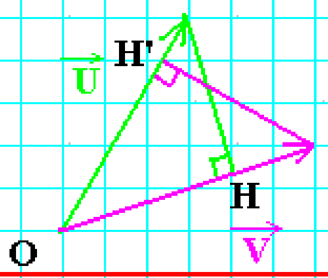
$$\vec{U}.\vec{V} = U_x * V_x + U_y * V_y$$

$$\vec{U}.\vec{V} = \|\vec{U}\| * \|\vec{V}\| * \cos(\widehat{\vec{U},\vec{V}})$$

Remarque :

$\vec{U} . \vec{V}$ correspond à une projection orthogonale du vecteur $\vec{U}$ sur le vecteur $\vec{V}$.

On a alors la relation $\vec{V}.\vec{U} = \vec{U}.\vec{V}$



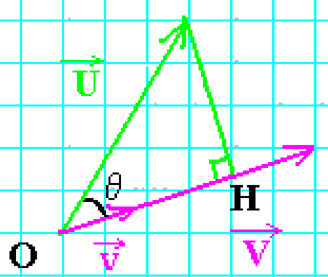
$$\boxed{\vec{V} . \vec{U} = ||\vec{OH}|| * ||\vec{V}|| \quad = \quad \vec{U} . \vec{V} = ||\vec{OH'}|| * ||\vec{U}||}$$

Remarque :

$\boxed{\text{Si les vecteurs } \vec{U} \text{ et } \vec{V} \text{ sont } \perp \text{ , alors } \vec{U}.\vec{V} = 0}$ car $(\widehat{\vec{U},\vec{V}}) = \Pi/2$ et $\cos(\Pi/2) = 0$

Application :

Projection sur un vecteur unitaire



$\vec{U} . \vec{v} = ||\vec{U}|| * ||\vec{v}|| * \cos(\widehat{\vec{U}, \vec{v}})$

$\vec{U} . \vec{v} = ||\vec{U}|| * 1 * \cos(\theta)$

$\vec{U} . \vec{v} = ||\vec{U}|| * \cos(\theta)$

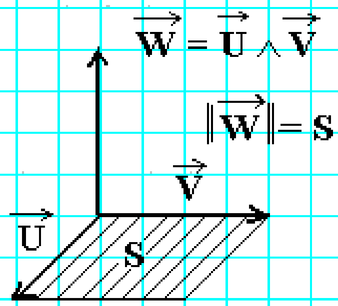
$\vec{U} . \vec{v} = OH$

On retrouve bien la propriété de projection orthogonale dans un triangle rectangle

III) Produit vectoriel

Le produitvectorielde 2 vecteurs $\vec{U} = \left| \begin{matrix} Ux \\ Uy \\ Uz \end{matrix} \right.$ et $\vec{V} = \left| \begin{matrix} Vx \\ Vy \\ Vz \end{matrix} \right.$ est un vecteur $\vec{W}$ et se note $\vec{U} \wedge \vec{V}$

Le vecteur $\vec{W}$ est le vecteur normal au plan porté par $\vec{U}$ et $\vec{V}$, et de norme la surface dont les génératrices sont $\vec{U}$ et $\vec{V}$



On a alors :

$$\vec{U} \wedge \vec{V} = \|\vec{U}\| * \|\vec{V}\| * \sin(\widehat{\vec{U}, \vec{V}})$$

$$\vec{U} \wedge \vec{V} = \begin{vmatrix} Ux \\ Uy \\ Uz \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} Vx \\ Vy \\ Vz \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Uy*Vz - Uz*Vy \\ Uz*Vx - Ux*Vz \\ Ux*Vy - Uy*Vx \end{vmatrix}$$

Remarque :

Si $\vec{U} /\!/ \vec{V}$, on a alors $\vec{U} \wedge \vec{V} = \vec{0}$

car $(\widehat{\vec{U}, \vec{V}}) = 0$
et $\sin(0) = 0$

IV) Résumé

	$\vec{U} /\!/ \vec{V}$	$\vec{U} \perp \vec{V}$
$\vec{U} . \vec{V}$		0
$\vec{U} \wedge \vec{V}$	$\vec{0}$	
$\det(\vec{U}, \vec{V})$	0	