Opérateurs vectoriels discrets

Dans le cadre de travaux de modélisation numérique (simulation , analyse par éléments finis) , il convient "d'adapter" les opérateurs vectoriels afin de rendre exploitable les données sous forme algorithmique.
Pour celà , en chaque point défini (un noeud) lors de la discrétisation ,la valeur attribué à ce noeud dépend des valeurs appliquées au noeuds connexes suivant les relations applicables (calculs mécanique , électrique , thermique etc...)

I) Expressions des dérivées 1ères et 2nde

D'après la formule de Taylor :

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + h\, f'(x_0) + \frac{h^2}{2!} f''(x_0) \qquad \text{(a)}$$

et donc :

$$f(x_0 - h) = f(x_0) - h\, f'(x_0) + \frac{h^2}{2!} f''(x_0) \qquad \text{(b)}$$

En effectuant a – b , on obtient :

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h} \left[f(x_0+h) - f(x_0-h)\right]$$

Ainsi

$$\left[\frac{d}{dx}\right]_i = \frac{1}{2h} \left[\underset{i-1}{(-1)} - \underset{i}{(0)} - \underset{i+1}{(1)} \right]$$

En effectuant a + b , on obtient :

$$f''(x_0) = \frac{1}{h^2} \left[f(x_0+h) - 2f(x_0) + f(x_0-h)\right]$$

Ainsi

$$\left[\frac{d^2}{dx^2}\right]_i = \frac{1}{h^2} \left[\underset{i-1}{(1)} - \underset{i}{(-2)} - \underset{i+1}{(1)} \right]$$

II) Expression des opérateurs vectoriels

$$\Delta f_{i,j} = \frac{[f(x_0-h,y_0) - 2f(x_0,y_0) + f(x_0+h,y_0)] + [f(x_0,y_0-h) - 2f(x_0,y_0) + f(x_0,y_0+h)]}{h^2}$$

$$\text{Ainsi} \quad (\Delta f)_{i,j} = \left[\begin{array}{ccc} & \underset{}{(1)}^{\,i,j+1} & \\ \underset{i-1,j}{(1)} & - (-4) - & \underset{i-1,j}{(1)} \\ & \underset{i,j-1}{(1)} & \end{array} \right]$$