Primitives

I) Définition

- Soit f une fonction définie sur I

Une fonction F , définie sur I est une primitive de f sur I lorsqu'elle est dérivable sur I et que :

$$\boxed{F' = f}$$

Primitive | Fonction | Dérivée

$$\begin{tikzcd} F(x) \arrow[r, bend left, "\text{dérivation}"] & f(x) \arrow[l, bend left, "\text{intégration}"] \arrow[r, bend left, "\text{dérivation}"] & f'(x) \arrow[l, bend left, "\text{intégration}"] \end{tikzcd}$$

II) Propriétés

- Toute fonction f dérivable sur un intervalle I admet des primitives F sur I , définies par $t \longmapsto F(t) + C$, où C est une constante

ex :

$f(t) = 3t^2 - 3$

$F(t) = t^3 - 3t + C$

- Parmi les primitives de f définies sur I , il existe une unique primitive F prenant une valeurs donnée y_0 pour une valeur donnée t_0

ex :

Trouver F(t) telle que F(2)=6

$F(2) = 2^3 - 3*2 + C = 6 \quad \Rightarrow C = 4$

$F(t) = t^3 - 3t + 4$ est l'unique primitive F de f telle que $F(2) = 6$

III) Tableau des primitives usuelles

Dans le cas de la fonction x :

Fonction	Dérivée
1	$x + k$
a	$ax + k$
x	$\frac{x^2}{2} + k$
x^2	$\frac{x^3}{3} + k$
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + k$
cos (x)	sin (x)
sin (x)	- cos (x)

Dans le cas de fonctions composées

Fonction	Dérivée
$u + v$	$U + V + k$
$h * u$	$h * U + k$
$u' * u^r$	$\frac{u^{r+1}}{r+1} + k$
$\frac{u'}{u}$	$\ln (u) + k$
$u' e^u$	$e^u + k$
cos (u)	$\frac{\sin(u)}{u'} + k$
sin (u)	$- \frac{\cos(u)}{u'} + k$

Avec k = constante

Retrouvez nous gratuitement sur www.fiches-land.eu

Applications :

a) Avoir une des formes connues ou forcer l'expression à devenir une des formes connues (sans ajouter ni supprimer de variable et en « jouant » sur u')

b) Rétablir l'égalité d'écriture entre les expressions en multipliant par un coefficient constant.

Ex : $\int \frac{3x}{x^2+3} dx$ $\qquad \frac{3x}{x^2+3} \approx \frac{u'}{u}$

a) On force l'équation à devenir $\frac{u'}{u}$

$$\int \frac{3x}{x^2+3} dx = \frac{3}{2} \int \frac{2\,x}{x^2+3} dx = \frac{3}{2} \ln (x^2+3) + k$$

b) On multiplie par un coefficient constant pour retrouver l'égalité d'écriture