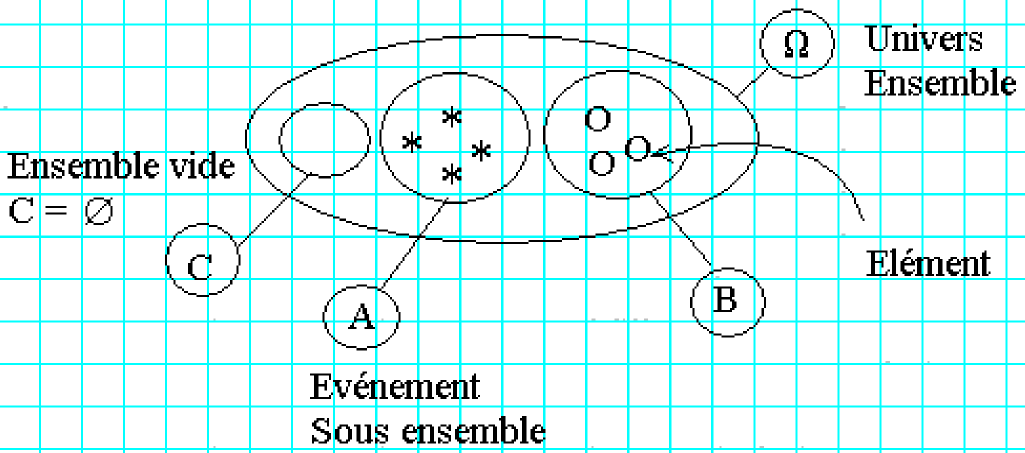
Les probabilités

I) Définitions

- Univers : Ensemble d'éléments : généralement noté Ω , il contient tous les éléments
- Evénement : Sous ensemble de Ω , ensemble d'éléments
- Eléments : Partie constitutive d'un ensemble / sous ensemble

Ex : Soit un univers composé de 7 objets : 4 * et de 3 O
On tire un objet
Soit A l'événement " l'objet tiré est * "
Soit B l'événement " l'objet tiré est O "
Soit C l'événement " l'objet tiré est □ "

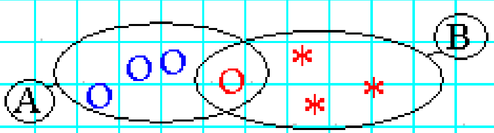


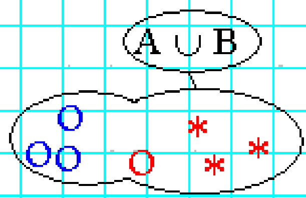
- Cardinal : On note Card(A) le nombre d'éléments de A
  Ici , card(A) = 4

II) Propriétés des événements

Evénement contraire de A : noté A , il contient tous les éléments qui n'appartiennent pas à A

Evénement union de A et B :



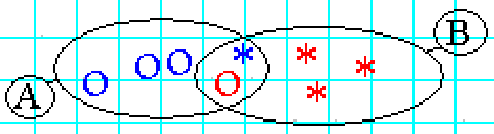


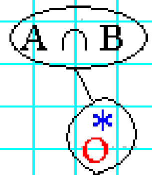
Notation :

Ensemble	$A \cup B$
Logique	"ou"
Probabilité	+

$x \in (A \cup B)$ si $x \in A$ ou $x \in B$

Evénement intersection de A et B :





Notation :

Ensemble	$A \cap B$
Logique	"et"
Probabilité	*

$x \in (A \cap B)$ si $x \in A$ et $x \in B$

III) Probabilités

- Formule de Laplace

Un événement A est une partie des résultats d'une expérience aléatoire
A est inclus dans l'ensemble Ω des résultats possibles : $A \subset E$

Dans le cas d'une loi équiprobable sur Ω , la probabilité de l'événement A vaut :

$$\boxed{P(A) = \frac{\text{nombre de cas favorables à A}}{\text{nombre de cas possibles}} = \frac{\text{card} (A)}{\text{card} (\Omega)}}$$

- Probabilité d'un univers

On a donc $P(\Omega) = \dfrac{\text{card} (\Omega)}{\text{card} (\Omega)}$ $\boxed{P(\Omega) = 1}$

- Equiprobabilité

Si un ensemble A possède n éléments xi , on dit qu'il y a équiprobabilité si chaque élément a une probabilité valant $\boxed{p_i = \dfrac{1}{n}}$

- Probabilité conditionnelle

On appelle probabilité conditionnelle $P_B(A)$, Probabilité de A sachant que B est réalisé , la grandeur définie par :

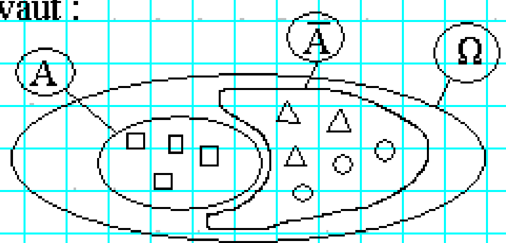
$$\boxed{P_B(A) = \frac{P (A \cap B)}{P (B)}}$$

<u>NB :</u> $P_B(A)$ peut également se noter $P (A / B)$

- Probabilité d'un événement complémentaire

On considère un événement A , partie des résultats d'une expérience aléatoire , telle que $A \subset \Omega$, avec Ω qui contient l'ensemble des résultats
La probabilité de l'événement complémentaire $\overline{A}$ vaut :

$$\boxed{P (\overline{A}) = 1 - P (A)}$$



- Valeur d'une probabilité

Si Ω est l'ensemble des résultats d'une expérience aléatoire et A une partie de ces résultats , comme P(A) est une somme partielle de pi , dont la somme totale vaut 1 , on a alors $\boxed{0 \leq P(A) \leq 1}$

- Formule des probabilités totales

Soient les événements A1 , A2 , ... An de probabilités non nulles , constituant une partition de Ω .
La probabilité d'un événement B de l'ensemble Ω peut se calculer :

$$\boxed{P(B) = P_{A1}(B) * P(A_1) + P_{A2}(B) * P(A_2) + \ldots + P_{An}(B) * P(A_n)}$$

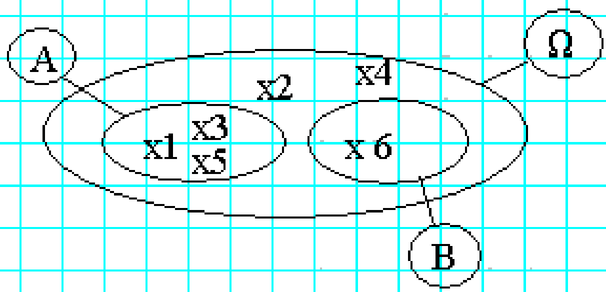
IV) Evénements et probabilités

Soit un dé équilibré à 6 faces, que l'on lance 1 fois et pour lequel on note le résultat obtenu .

$\Omega = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$

Evénements incompatibles (Si $A \cap B = \varnothing$)

Evt A : on tire un nombre impair
Evt B : on tire un nombre > à 5



$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B)}$

$\boxed{P(A \cap B) = 0}$

AN : $P(A \cup B) = 3/6 + 1/6 = 4/6$
$P(A \cap B) = 0$

Evénements indépendants

Les lancer successifs d'une pièce , d'un dé ... sont des expériences indépendantes .
La réalisation d'un résultat n'agit pas sur la probabilité du résultat suivant.

2 évènements A et B sont indépendants lorsque la probabilité de l'un ne dépend pas de la réalisation de l'autre :

$\boxed{P_A(B) = P(B) \quad \text{ou} \quad P_B(A)=P(A)}$

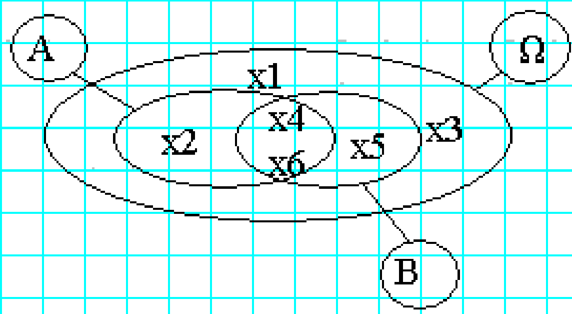
On en déduit que :

$P (A \cap B) = P (A) * P_A(B)$

$\boxed{P (A \cap B) = P (A) * P(B)}$

Evénements compatibles

Evt A : on tire un nombre pair
Evt B : on tire une nombre ≥ à 4

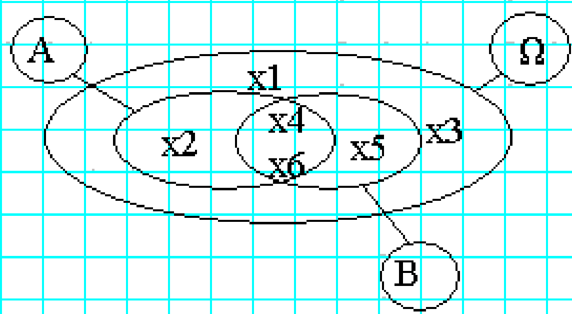


$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$

AN : $P(A \cup B) = 3/6 + 3/6 – 2/6 = 4/6$

Evénements conditionnels

Evt A : on tire un nombre pair
Evt B : on tire un nombre ≥ à 4



$$\boxed{P_A(B) = \frac{P (A \cap B)}{P (A)}}$$

AN : $P_A(B) = (2/6) / (3/6) = 2/3$

V) Mode de représentation

Ex : Une urne contient 15 boules notées de 1 à 15
7 sont vertes . Les autres sont jaunes
5 boules jaunes ont un n° pair
On tire une boule

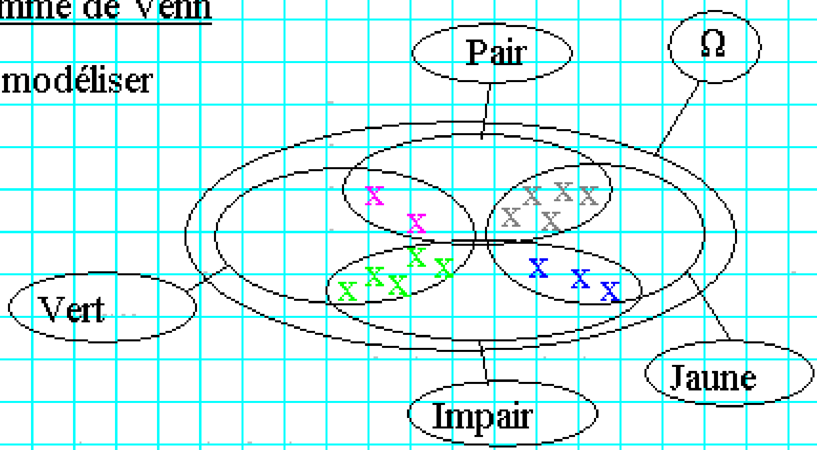
1) Représentation par tableau pondéré

Le tableau pondéré sert à modéliser des processus statiques
On y place en ligne et colonne les variables influentes

nb / Clr	Pair	Impair	Total
V	2	5	7
J	5	3	8
Total	7	8	15

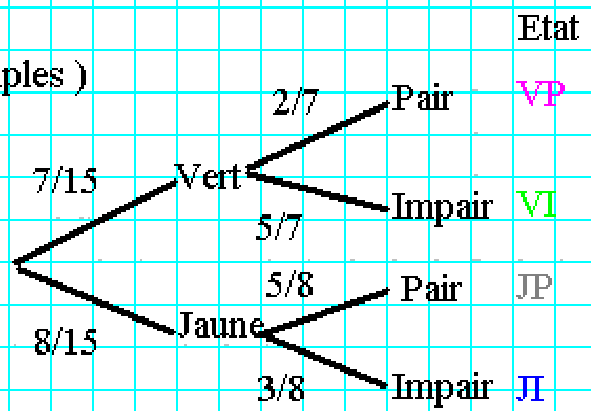
2) Représentation par diagramme de Venn

Le diagramme de Venn sert à modéliser des processus statiques



3) Représentation par arbre pondéré

L'arbre pondéré sert à modéliser des processus dynamiques (tirages multiples)



Ainsi :

$P(J) = \dfrac{card(J)}{Card(\Omega)} = \dfrac{8}{15}$

$P(V) = \dfrac{card(V)}{Card(\Omega)} = \dfrac{7}{15}$

$P_V(I) = 5/7$ $\qquad$ $P_J(I) = 3/8$

$P(I) = P(V) * P_V(I) + P(J) * P_J(I) = 8/15$

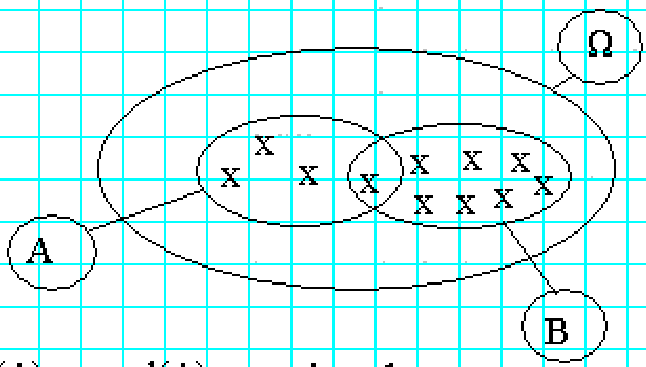
$P(J \cap I) = 8/15 * 3/8 = 3/15$

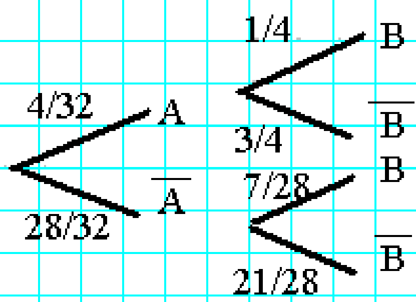
$P(J \cup I) = P(J) + P(I) - P(J \cap I) = 13/15$

VI) Exemples

1) Exemple 1

Soit un jeu de 32 cartes.
On tire une carte au hasard , que l'on remet ensuite dans le jeu.
Quelle sont les probabilités de : Evt A "Tirer une dame" ?
Evt B "Tirer un coeur" ?
Evt C "Tirer une dame de coeur" ?
Evt D "Tirer une dame ou un coeur" ?





$$P(A) = \frac{card(A)}{Card(\Omega)} = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$$

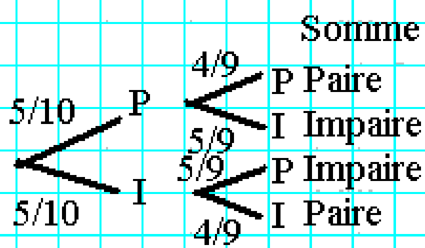
$$P(B) = \frac{card(B)}{Card(\Omega)} = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$$

$$P(C) = P(A \cap B) = P(A) * P(B) = \frac{card(B)}{Card(\Omega)} = \frac{1}{32}$$

$$P(D) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} - \frac{1}{32} = \frac{11}{32}$$

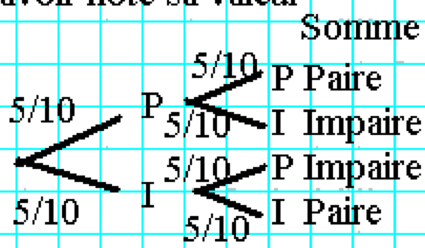
II) Exemple 2

10 cartons sont notés de 1 à 10
On choisit simultanément 2 cartons au hasard et on note la somme obtenue.
Quelle est la probabilité que la somme soit paire ? (sans remise)



P(somme paire) = (5/10 * 4/9) + (5/10 * 4/9)
= 4/9

NB : On peut refaire l'exemple en remettant la 1ère carte dans le jeu (avec remise) après avoir noté sa valeur



P(somme paire) = (1/2 * 1/2) + (1/2 * 1/2)
= 1/2

Remarque : il existe 2 types de tirages

Tirage simultané : il ne peut pas comporter de remise

Tirage successif : entre 2 tirages , on peut au choix décider d'avoir une remise ou non .

$$\begin{tikzcd}
\text{Simultané} \arrow[r] & \text{Sans remise} \\
\text{Successif} \arrow[ur] \arrow[r] & \text{Avec remise}
\end{tikzcd}$$

Dans les 2 cas , on peut modéliser le système par arbre.