Séries de Fourier

Serie de Fourier

Elle permet de décomposer un signal périodique en une somme de signaux périodiques de fréquences différentes.

SERIES DE FOURIER

▶ Conditions de Dirichlet

On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$. La fonction f satisfait aux conditions de Dirichlet si :
f est périodique de période T, f et sa dérivée f ' sont continues (de classe C_1) par morceaux sur l'intervalle [0 ; T].

▶ Coefficients d'une fonction T-périodique

Si f satisfait aux conditions de Dirichlet, les coefficients du développement en série de Fourier de f sont :

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)dx$$

pour tout $n \geq 1$ $a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos(n\omega x)dx$; $b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin(n\omega x)dx$

avec $\omega = \frac{2\pi}{T}$. **La série de Fourier associée à f se note :**

$$S(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)\right)$$

En tout point x où la fonction f est continue, $S(x) = f(x)$;

en tout point x_0 où f n'est pas continue, $S(x_0) = \frac{1}{2}\left(\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) + \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x)\right)$.

Si f est paire et de période 2π :

$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx$; $a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\, dx$; $b_n = 0$.

Si f est impaire et de période 2π :

$a_0 = 0$; $a_n = 0$; $b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\, dx$.

On pose $u_n = a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)$.
Les termes u_n sont appelés « harmoniques de rang n » ; u_1 est le « fondamental ».

• Forme complexe des séries de Fourier

$f(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega x}$ avec $c_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)e^{-in\omega x}dx$.

avec $\left| \begin{array}{l} c_0 = a_0 \\ c_n = \frac{a_n - ib_n}{2} \\ c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2} \end{array}\right.$

▶ Formule de Parseval

Soit f une fonction T-périodique, vérifiant les conditions de Dirichlet et f_e la valeur efficace de f :

$$f_e^2 = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right)$$ où a_0, a_n et b_n sont les coefficients de Fourier.

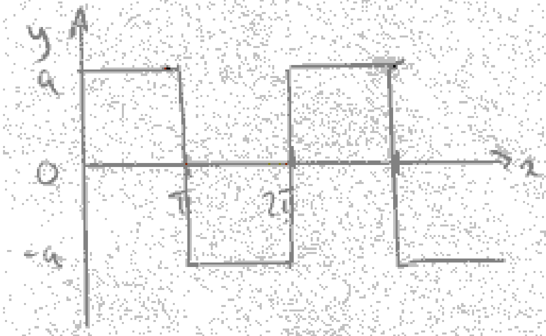
On rappelle que la valeur efficace f_e de f vérifie :

$$f_e^2 = \frac{1}{T}\int_0^T f^2(x)dx \text{ et } f_e \geq 0.$$

Ainsi, tout signal périodique peut être décomposé comme la somme de signaux sinusoïdaux :

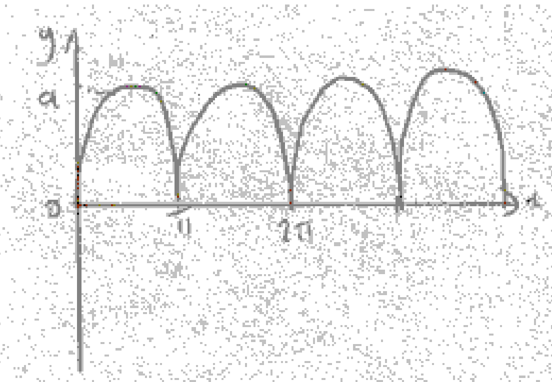
$$\boxed{u(t) = \bar{U} + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{U}_n \cos(n\omega t + \varphi_n)}$$

ex



$$\begin{cases} y = a & \text{pour } 0 < x < \pi \\ y = -a & \text{pour } \pi < x < 2\pi \end{cases}$$

$$y = \frac{4a}{\pi}\left[\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots\right]$$



$$\begin{cases} y = a\sin x & \text{pour } 0 < x < \pi \\ y = -a\sin x & \text{pour } \pi < x < 2\pi \end{cases}$$

$$y = \frac{2a}{\pi} - \frac{4a}{\pi}\left(\frac{\cos 2x}{1.3} + \frac{\cos 4x}{3.5} + \frac{\cos 6x}{5.7} \dots\right)$$

$$u(t) = \bar{u} + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{u}_n \cos(n\omega t + \varphi_n)$$

- Le terme $\hat{u}_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$ est le **fondamental** ($n = 1$) du signal.
- Les termes suivants d'expression générale $\hat{u}_n \cos(n\omega t + \varphi_n)$, avec $n > 1$, sont les **harmoniques** de rang n.

6.1.2. Exemple 1 : signal rectangulaire

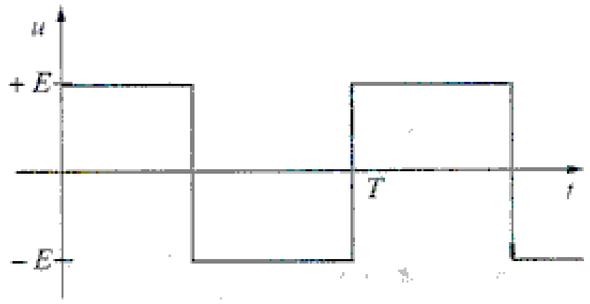


Figure 10.10. *On pose $\omega = \frac{2\pi}{T}$: c'est la pulsation du fondamental*

On peut montrer que le signal rectangulaire symétrique $u(t)$ représenté sur la figure 10.10 peut être donné par la relation suivante (le nombre de termes de la somme est infini) :

$$u(t) = \frac{4E}{\pi} \sin \omega t + \frac{4E}{3\pi} \sin 3\omega t + \frac{4E}{5\pi} \sin 5\omega t + \frac{4E}{7\pi} \sin 7\omega t + \frac{4E}{9\pi} \sin 9\omega t + \ldots$$

ou :

$$u(t) = \frac{4E}{\pi} \sum_{n_{\text{impair}}=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin n\omega t$$

Cette relation appelée improprement **décomposition du signal**, possède des propriétés particulières : les deux premières sont liées aux propriétés de symétrie du signal $u(t)$.

6.2.2. Résultats

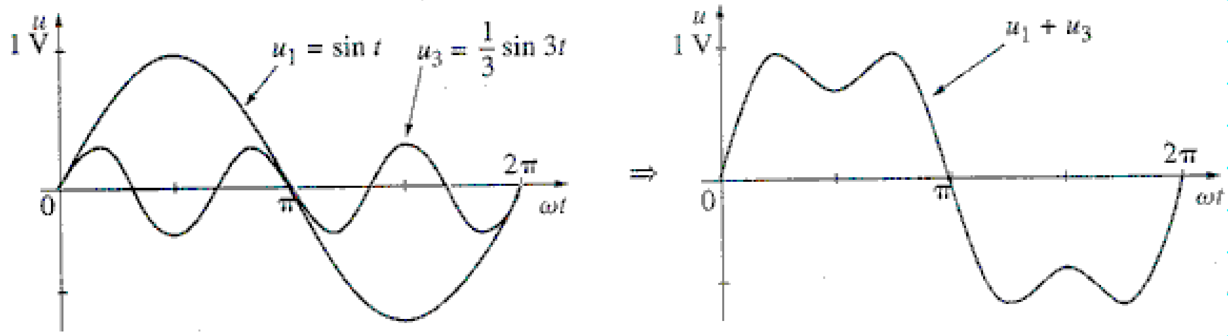


Figure 10.12. *Recomposition du signal rectangulaire avec le fondamental et l'harmonique 3*

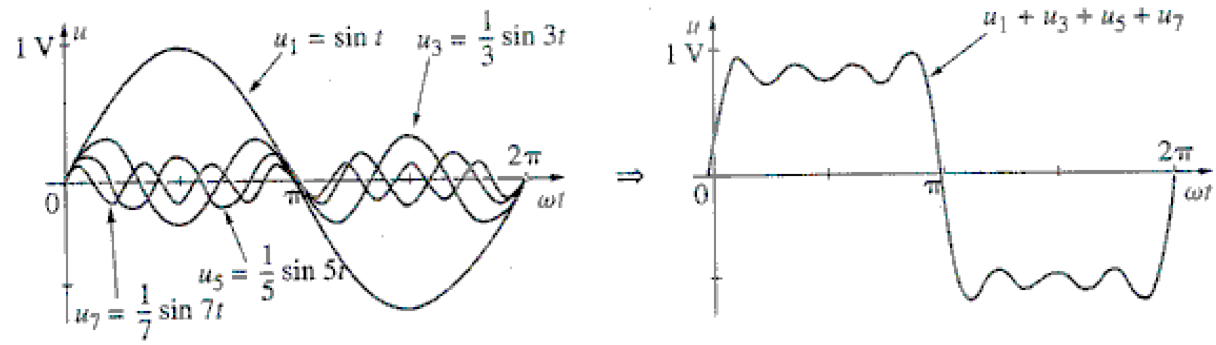


Figure 10.13. *Effet de l'addition des harmoniques 5 et 7*