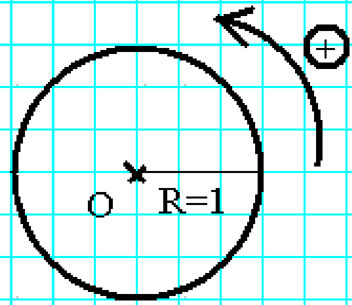
La trigonométrie

La trigonométrie est la discipline qui concerne les angles et leurs mesures .

I) Définitions

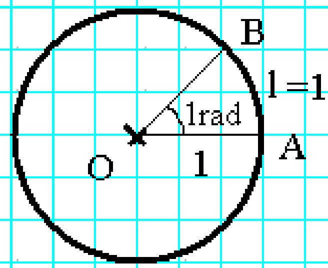
1) Cercle trigonométrique

On appelle cercle trigonométrique tout cercle dont le rayon est égal à 1 unité de longueur , et sur lequel on a choisi un sens de rotation direct positif



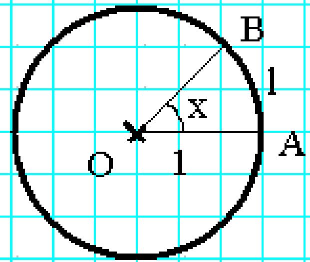
2) Mesure angulaire : le radian

Sur un cercle trigonométrique , un angle au centre de mesure 1 radian intercepte un arc de longueur 1 unité



De même , sur un cercle de rayon R , un angle au centre de mesure 1 radian intercepte un arc de longueur R unité

Plus généralement , sur un cercle trigonométrique , le mesure en radians d'un angle au centre est égale à la mesure , en unité de longueur , de l'arc qu'il intercepte :



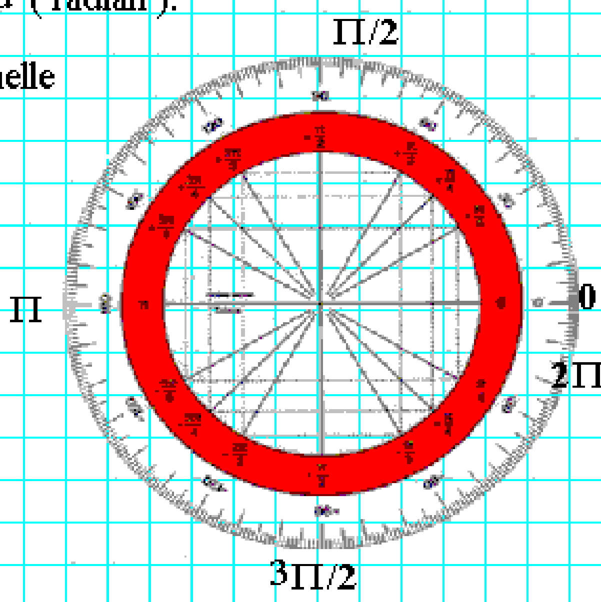
L'angle x = longueur de l'arc $\overset{\frown}{AB}$

3) Mesures angulaires et conversion

Un angle se mesure soit en ° (degré) ou rad (radian).

La mesure d'un angle en rad est proportionnelle à sa mesure en °

Un cercle complet a pour mesure 360° ou 2Π rad . Ainsi 2Π rad correspond à 0 rad



Pour passer d'un mode de mesure à l'autre , on effectue une conversion avec un produit en croix , sur la base suivante :

360° ↔ 2Π rad

4) Mesure principale d'un angle

La mesure principale d'un angle α est la mesure de l'angle se situant sur l'intervalle $[-\Pi, \Pi[$

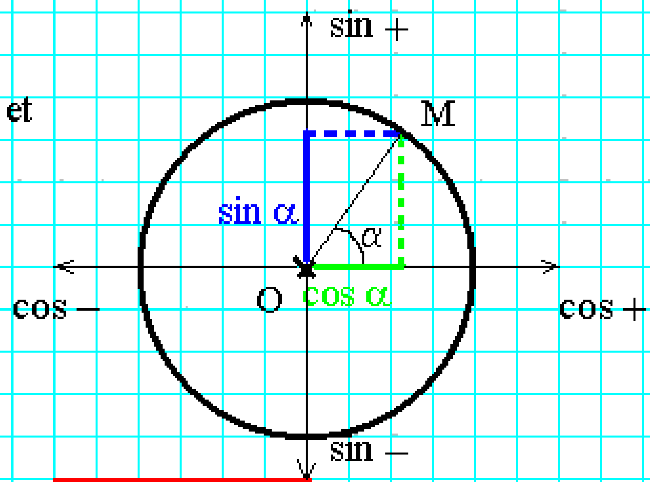
II) Cosinus et sinus d'un angle

1) Définition

Soit le point M placé sur un cercle C , et de mesure d'arc α

Le repère orthonomé centré sur O a :

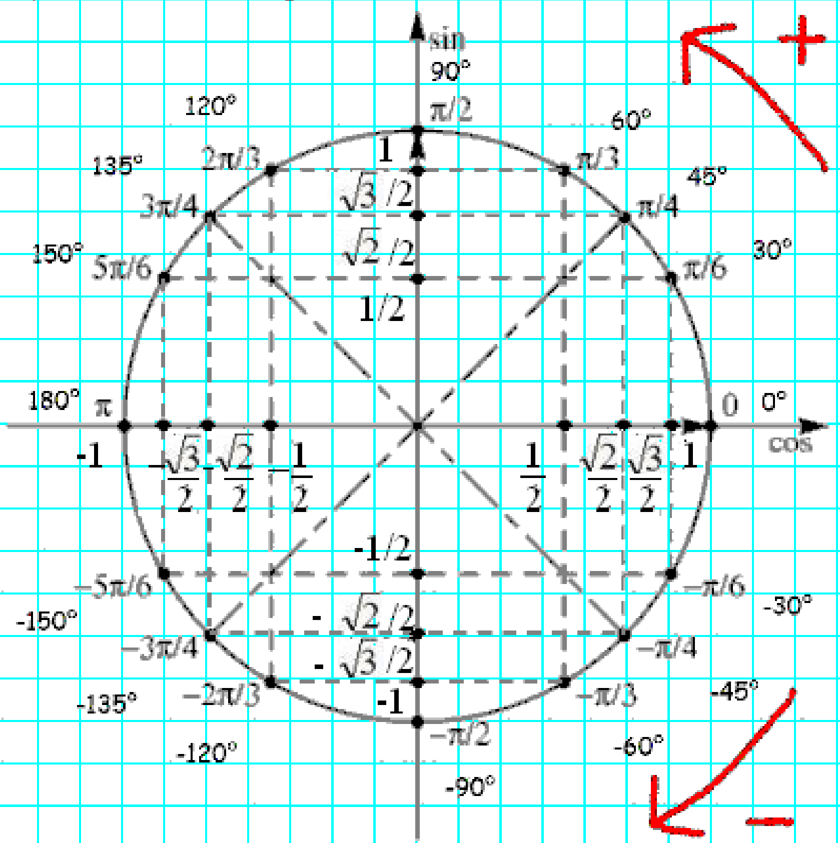
pour axe horizontal celui des cosinus
pour axe vertical celui des sinus



L'abscisse de M a pour valeur cos α
L'ordonnée de M a pour valeur sin α

$$\boxed{X_M = \cos\alpha \quad Y_M = \sin\alpha}$$

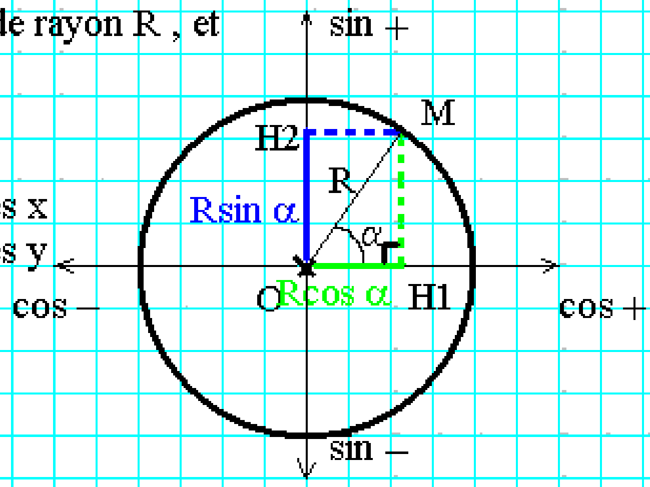
2) Valeurs remarquables



Angle α (rad)	0	Π/6	Π/4	Π/3	Π/2	Π
cos α	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
sin α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

3) Relation entre cosinus et sinus

Soit le point M placé sur un cercle C de rayon R , et de mesure d'arc α



Appellons :
H1 projeté orthogonal de M sur l'axe des x
H2 projeté orthogonal de M sur l'axe des y

On sait que $\cos\alpha = \frac{adj}{hyp} = \frac{OH_1}{OM} = \frac{OH_1}{R}$

$$\boxed{OH_1 = R\cos\alpha}$$

De même $\sin\alpha = \frac{opp}{hyp} = \frac{H_1M}{OM} = \frac{H_1M}{R}$

$$\boxed{H_1M = R\sin\alpha}$$

Retrouvez nous gratuitement sur www.fiches-land.eu

On rappelle également que $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{opp}{adj}$

Le triangle OH1M est un triangle rectangle en H1 : On peut donc appliquer le théorème de Pythagore :

$OM^2 = OH_1{}^2 + H_1M^2$

or $OH_1 = R\cos\alpha$
Et $H_1M = OH_2 = R\sin\alpha$

$OM^2 = (R\cos\alpha)^2 + (R\sin\alpha)^2$
$OM^2 = R^2\cos^2\alpha + R^2\sin^2\alpha$ avec $OM = R$
$R^2 = R^2(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)$

$$\boxed{\text{On a donc } (\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) = 1}$$

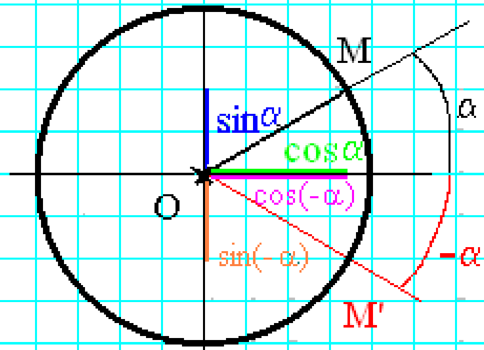
A noter :

$-1 \leq \cos\alpha \leq 1$
$-1 \leq \sin\alpha \leq 1$

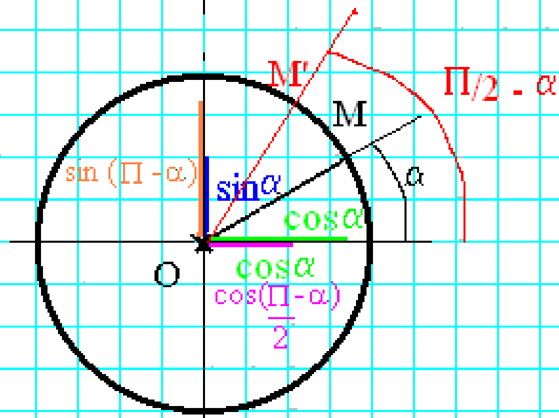
4) Autres relations

Plaçons nous dans un cercle trigonométrique , et plaçons y le point M défini par l'angle α

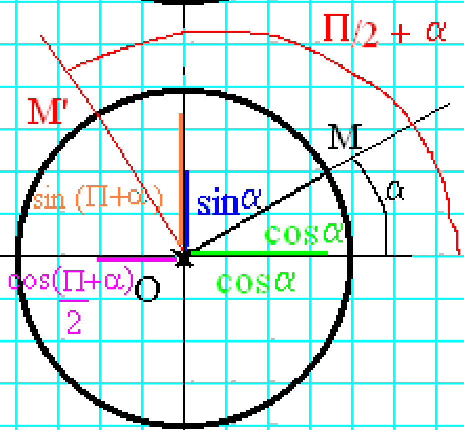
$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$
$\sin(-\alpha) = \sin\alpha$



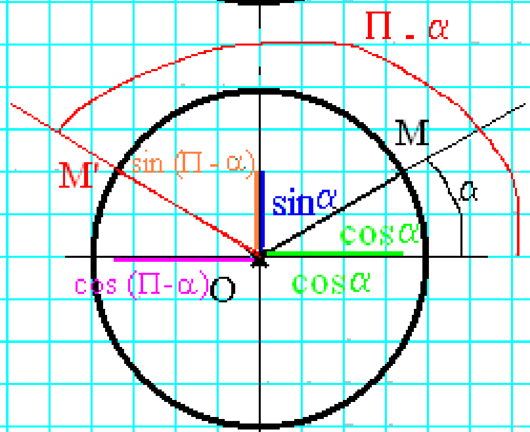
$\cos(\Pi/2 - \alpha) = \sin\alpha$
$\sin(\Pi/2 - \alpha) = \cos\alpha$



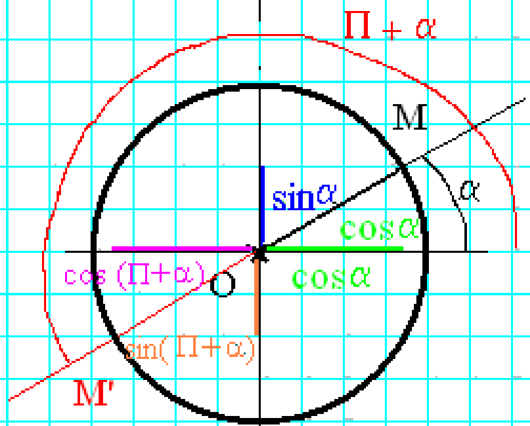
$\cos(\Pi/2 + \alpha) = -\sin\alpha$
$\sin(\Pi/2 + \alpha) = \cos\alpha$



$\cos(\Pi - \alpha) = -\cos\alpha$
$\sin(\Pi - \alpha) = \sin\alpha$



$\cos(\Pi + \alpha) = -\cos\alpha$
$\sin(\Pi + \alpha) = -\sin\alpha$



Formules d'addition

$$\boxed{\begin{aligned}&\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b\\&\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b\\&\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a\\&\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a\end{aligned}}$$

Formules de duplication

$$\boxed{\begin{aligned}&\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a\\&\sin(2a) = 2 \sin a \cos a\end{aligned}}$$

Retrouvez nous gratuitement sur www.fiches-land.eu

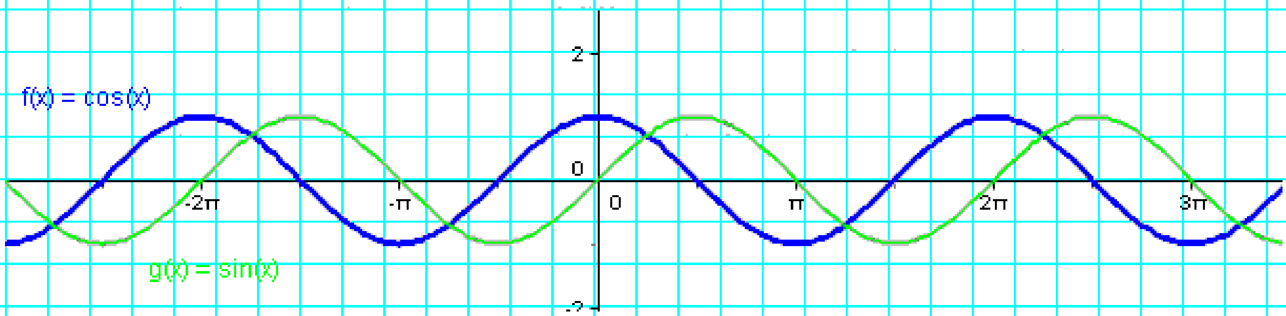
Formules de linéarisation

$$\boxed{\begin{aligned}&\cos^2 a = \frac{1+\cos 2a}{2}\\&\sin^2 a = \frac{1-\cos 2a}{2}\end{aligned}}$$

5) Représentation des fonctions cosinus et sinus

soit $f : \alpha \to \cos \alpha$

et $g : \alpha \to \sin \alpha$



Les fonctions f et g sont des sinusoides

Propriétés :

Parité : La fonction cosinus est paire
La fonction sinus est impaire

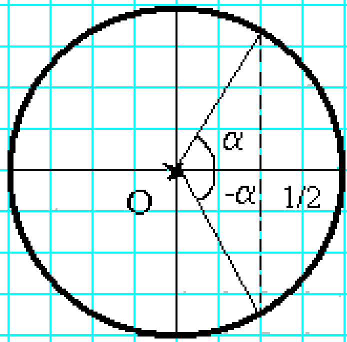
Périodicité $\cos(\alpha + 2\Pi) = \cos(\alpha)$
$\sin(\alpha + 2\Pi) = \sin(\alpha)$

Les fonctions cosinus et sinus sont périodiques de période $T = 2\Pi$

III) Résolution d'équations trigonométriques

$\cos(x) = \cos(\alpha)$

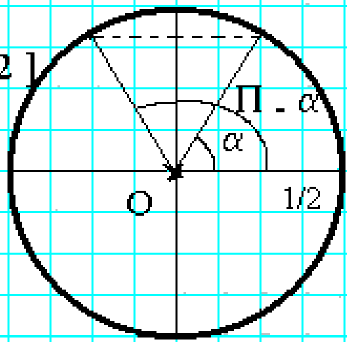
$$\boxed{\text{si } \begin{cases} x = \alpha\ [2\Pi] \\ x = -\alpha\ [2\Pi] \end{cases}}$$ avec $\alpha \in [\ 0\ ,\ \Pi\ ]$



NB : $[2\Pi]$ = modulo $2\Pi = 2k\Pi$, $k \in Z$

$\sin(x) = \sin(\alpha)$

$$\boxed{\text{si } \begin{cases} x = \alpha\ [2\Pi] \\ x = \Pi - \alpha\ [2\Pi] \end{cases}}$$ avec $\alpha \in [\ -\Pi/2\ ,\ \Pi/2\ ]$



NB : $[2\Pi]$ = modulo $2\Pi = 2k\Pi$, $k \in Z$

Retrouvez nous gratuitement sur www.fiches-land.eu

Exemple

$\text{Cos } 2x = ½$

$\text{Cos } 2x = \cos(\Pi/3)$

$$\begin{cases} 2x = \Pi/3\ [2\Pi] \\ 2x = -\Pi/3\ [2\Pi] \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \Pi/6\ [\Pi] \\ x = -\Pi/6\ [\Pi] \end{cases}$$