40 TECHNOLOGIE ET STATISTIQUES

OBJECTIFS

- Donner des notions de probabilité, de population, d'échantillon, d'individu, de variable discrète et de variable continue, de distribution et de fréquence.
- Définir moyenne arithmétique et écart-type.
- Indiquer les caractéristiques et les propriétés des lois statistiques usuelles et de la régression linéaire.
- Application à la cotation fonctionnelle et exercices.

Les statistiques et les probabilités sont l'un des outils mathématiques les plus utiles à la technologie et à ses applications. Elles permettent de prendre des décisions là où les activités et les phénomènes sont pleins d'incertitudes.
Avec elles, de nombreuses données (observations, mesures expérimentales, contrôles, etc.) peuvent être observées, classées, présentées, analysées, estimées, comparées et interprétées.

I - Notion de probabilité

La probabilité est une grandeur qui mesure ou estime les chances de succès, ou d'insuccès, d'événements dont le caractère est aléatoire : possible et non certain.
Probabilité d'un événement : c'est un nombre, compris entre 0 et 1, qui mesure les chances ou les possibilités qu'a un événement (A) de se produire.
Notation $P(A)$.
Propriétés

$P(A) = \dfrac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$
$P(A) = \dfrac{\text{nombre de fois que l'on a l'événement } A \text{ en } n \text{ tentatives}}{n \text{ (nombre total de tentatives ou d'essais)}}$

$0 \leqslant P(A) \leqslant 1$
$P(A) = 0$ si l'événement ne peut pas se produire ;
$P(A) = 1$ si l'événement est certain de se produire.
Inversement, la probabilité que l'événement A ne se produise pas est :
$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$ ou $P(A) + P(\overline{A}) = 1$

Exemple : au jeu pile ou face avec une pièce de monnaie, la probabilité d'avoir le côté face est de 0,5 (1 chance sur 2). On peut écrire :
P (côté face) $= P(f) = 0{,}5$ (de chance),
et la même chose avec le côté pile : P (côté pile) $= P(p) = 0{,}5$

Définition : pour un échantillon ou pour une population :

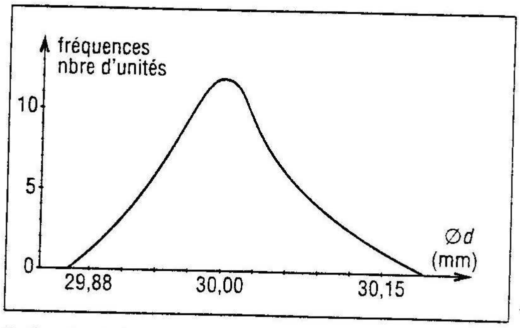
$$f_i = \text{fréquence en \%} = \frac{\text{nombre des mesures dans le même intervalle } i}{\text{nombre total des mesures ou observations}}$$

2. Courbes de fréquences de distribution

a) Fréquences de distribution

Si pour l'exemple précédent on augmente le nombre des mesures ou le nombre d'individus de l'échantillon, il devient possible de diminuer la largeur ou la taille des intervalles tout en augmentant leur nombre.

L'allure de la distribution peut ainsi devenir de plus en plus précise jusqu'à obtention d'une courbe continue et régulière, appelée courbe de fréquence de distributions ou courbe de densité de population **(fig. 3)**.



3. Courbe de fréquence de distribution (tableau 2, page 465).

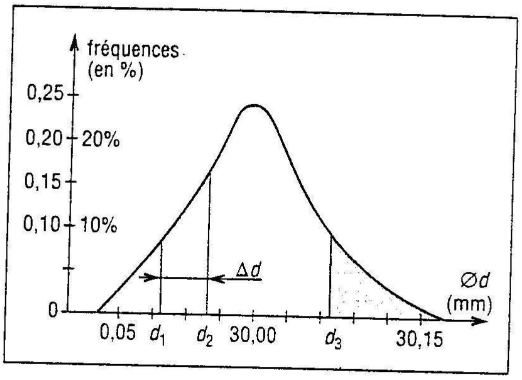
b) Fréquences de distribution pour estimation de probabilités

Si, toujours pour le même exemple, on exprime la fréquence en pourcentage du nombre total des observations, au lieu du nombre d'unités, on obtient une courbe permettant de faire des estimations de probabilité.

Propriétés : l'aire sous toute la courbe est égale à l'unité ou à 1 et représente la population totale soit 100 % **(fig. 4)**.

L'aire colorée, limitée par la courbe et les verticales passant par d_1 et d_2, représente le pourcentage de cylindres situé entre d_1 et d_2.

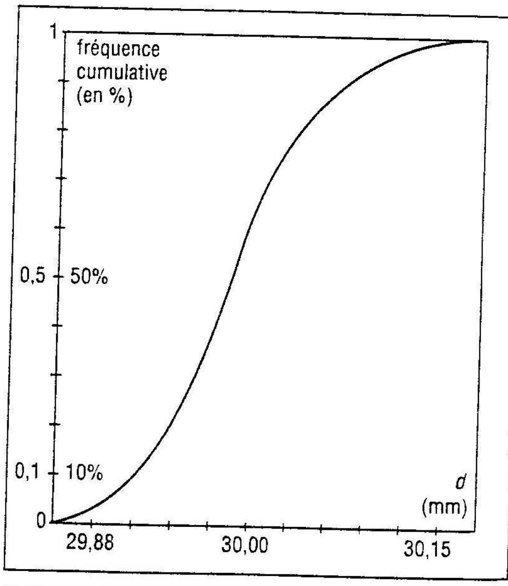
De même, l'aire limitée par la courbe et par la verticale d_3 représente le pourcentage de cylindres dont le diamètre est supérieur à d_3.



4. Fréquence de distribution en % (tableau 2, page 465).

c) Fréquences de distribution cumulatives

C'est une autre manière de présenter des données. Les fréquences sont rassemblées de manière cumulative. À la fréquence obtenue normalement à chaque intervalle est ajoutée la somme de toutes les fréquences des intervalles immédiatement précédents (voir fig. 5 pour le cas de l'exemple précédent).



5. Courbe des fréquences cumulatives (tableau 2, page 465).

d) Courbes de fréquences usuelles

Un grand nombre de mesures ou d'observations statistiques suivent des densités de population ou des fréquences de distribution types (lois normale, binomiale, Poisson, exponentielle, lognormale, Weibull...).

Ces cas types permettent de faire rapidement, grâce à des formulaires, tables de valeurs ou logiciels, tous les calculs et estimations concernant les données collectées.

V - Moyenne arithmétique - Écart-type - Coefficient de dispersion

Les distributions sont le plus souvent caractérisées par une valeur moyenne, qui indique la valeur centrale de la répartition, et par une dispersion ou écart-type, qui précise comment les valeurs de la distribution s'étalent autour de la valeur moyenne.

Symboles utilisés	échantillon	population
moyenne arithmétique	$\bar{x}$	μ
écart-type	S	σ

1. Valeur moyenne arithmétique

Pour une population de n individus, elle est égale à la moyenne arithmétique de toutes les valeurs collectées.

$$\mu = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Remarque : la définition est la même pour un échantillon de n individus (symbole $\bar{x}$ à la place de μ).

Exemple : dans le cas des 50 diamètres du tableau des résultats des mesures, page 465, la valeur moyenne arithmétique est égale au diamètre moyen (dm) de l'échantillon.

$$\bar{x} = d_m = \frac{1}{50}\sum_{i=1}^{50} x_i = 30{,}003 \text{ mm}$$

2. Écart-type et variance V

L'écart-type est de loin la plus importante mesure de dispersion ou d'étalement d'un ensemble de données statistiques.

a) Variance V, ou fluctuation : elle est définie comme le carré de l'écart-type ($V = S^2 = \sigma^2$). Pour une population de n individus de valeur moyenne μ :

$$V = \sigma^2 = \frac{(x_1 - \mu)^2 + (x_2 - \mu)^2 + \ldots + (x_n - \mu)^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2}{n-1}$$

$(x_i - \mu)$ = déviation de l'observation x_i par rapport à la valeur moyenne μ

b) Écart-type : il est égal à la racine carré de la variance.

$$\sigma = \left[\frac{1}{n-1}\cdot\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2\right]^{1/2}$$

Remarques :
- La définition est la même pour un échantillon de *n* individus (symbole *S* à la place de σ).

Exemple : cas de l'échantillon des 50 diamètres du tableau, page 465.

$$S^2 = \frac{1}{49}\left[\sum (x_i - d_m)^2\right] = \frac{1}{49}\left[\sum (x_i - 30{,}003)^2\right] \approx 0{,}003\ 3$$

À titre de comparaison, la valeur moyenne de la population correspondante (les milliers de cylindre produits) est μ = 30,000 et l'écart type σ = 0,0570 mm.

- Pour les petites valeurs de *n* ($n < 30$), les statisticiens ont montré que l'utilisation de $n - 1$ à la place de n permet une meilleure estimation de la variance. Pour les grandes valeurs, l'utilisation de *n* ou $n - 1$ ne change rien. Pour $n = 30$, l'utilisation de *n* à la place de $n - 1$ entraîne une différence de 2 %.

- Pour des raisons de calculs, notamment avec les calculatrices de poche (avec touches ou fonctions : Σx, Σx^2, S_x, σ_x, Σy, Σy^2, S_y, σ_y...), la formule suivante est plus facile à exploiter.

$$\boxed{S = \left[\frac{n.\Sigma x_i^2 - (\Sigma x_i)^2}{n(n-1)}\right]^{1/2}}$$

3. Coefficient de dispersion Cx

Il est égal au rapport, ou quotient, de l'écart-type par la moyenne arithmétique. C'est un nombre souvent exprimé en pourcentage.

$$\boxed{Cx = \frac{\sigma}{\mu}}$$

VI - Loi normale ou distribution de Gauss

La distribution de Gauss est la distribution la plus connue et la plus utilisée. Un grand nombre de mesures et d'observations (mesures répétitives de longueurs et de diamètres, dispersions d'usinage, distributions de contraintes, contrôles de qualité, etc.) suivent son allure symétrique en forme de cloche.

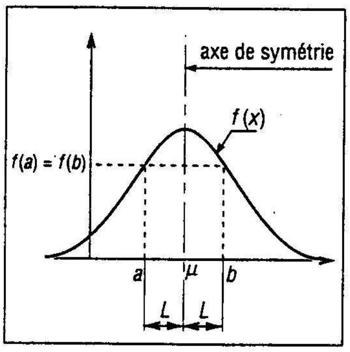
1. Équation de la distribution - Forme $f(x)$

Elle donne la fréquence, la répartition ou la densité de la population.

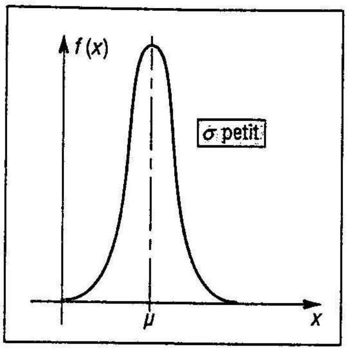
$$\boxed{f(x) = \frac{1}{\sigma.(2\pi)^{0,5}} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2}\left[\frac{x-\mu}{\sigma}\right]^2\right]}$$

$[-\infty < x < \infty]$
μ = moyenne arithmétique de la population
σ = écart-type de la population

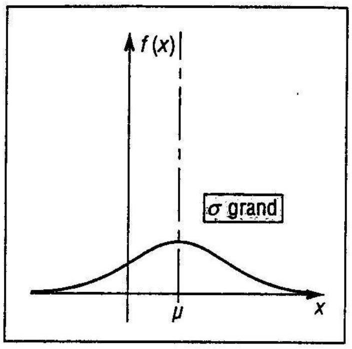
Remarques :
- La forme de la courbe dépend de la valeur des paramètres σ et μ.
- Elle est toujours symétrique par rapport à la valeur moyenne μ (**fig. 6**).
- L'étalement ou la dispersion de la courbe dépend de σ (**fig. 7 et 8**).



6. Symétrie de la loi normale.



7. Loi normale avec σ petit.



8. Loi normale avec σ grand.

2. Équation *f* (*Z*)

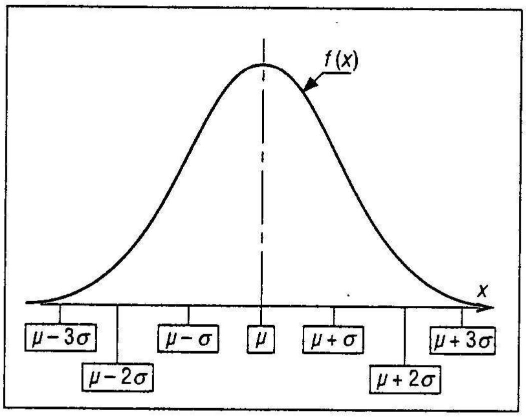
Pour faire les estimations de probabilités, la distribution d'origine *f* (*x*) doit être remplacée par *f* (*Z*), fonction connue, tabulée et faisant intervenir les pourcentages de population. À cette fin, il faut utiliser le changement de variable ci-contre.

$$Z = \frac{x - \mu}{\sigma} \quad \text{et} \quad f(z) = \frac{1}{(2\pi)^{0,5}} \cdot \exp\left[-\frac{Z^2}{2}\right]$$

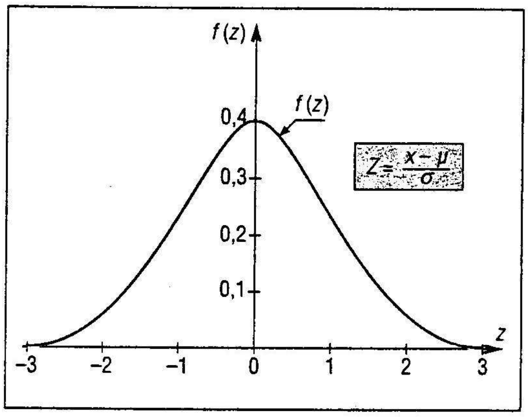
Propriétés : l'aire sous toute la courbe *f* (*Z*) est égale à 1 (ou 100 %) et représente, en pourcentage, l'ensemble de la population.

Entre $Z = 0$ et $Z = 1$ sont rassemblés 34,13 % de la population (aire de 0,341 3), entre $Z = -3$ et $Z = 3$ (6 fois l'écart type σ) on trouve 99,74 % de la population (aire de 0,997 4).

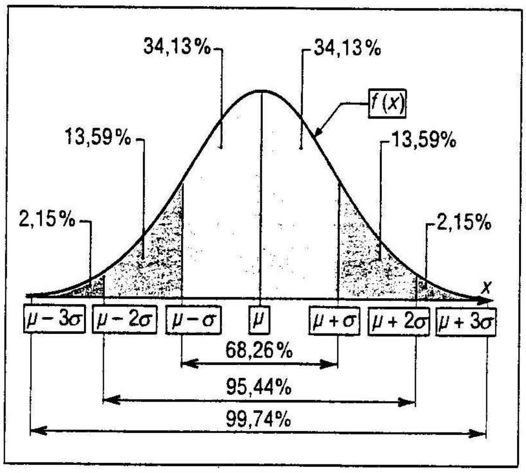
Les proportions sont parfaitement identiques sous la courbe *f* (*x*).



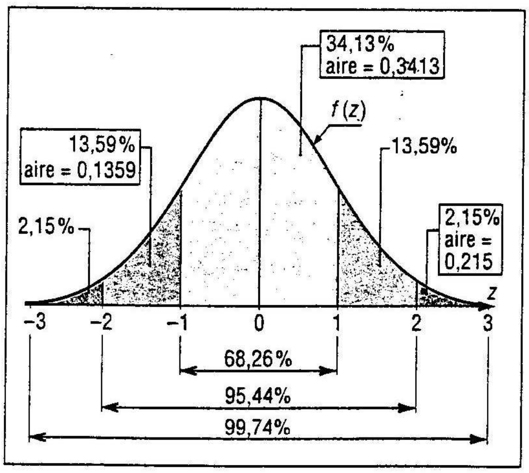
9. Loi normale distribution *f* (*x*).



10. Distribution *f* (*z*) déduite de *f* (*x*).



11. Répartition de la population sous *f* (*x*).



12. Répartition de la population sous *f* (*z*).

3. Fonction de probabilité cumulative $\phi(Z)$

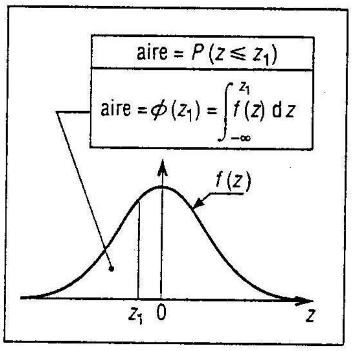
Pour calculer la valeur des aires sous la courbe $f(Z)$ (donc pour connaître les probabilités) o. utilise la fonction $\phi(Z)$.

$\phi(Z)$ mesure l'aire ou le pourcentage de population sous la courbe $f(Z)$ située entre les valeurs négatives les plus éloignées ($-\infty$) et Z. Les valeurs de $\phi(Z)$ sont connues et tabulées (voir page 472).

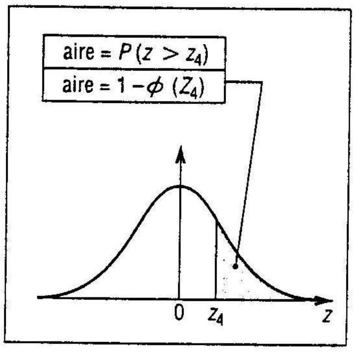
a) Probabilité d'avoir Z inférieure ou égale à une valeur donnée Z_1 [$P(Z \leq Z_1)$] : $\phi(Z_1)$ donne directement la probabilité cherchée en mesurant l'aire (ou le % de population) sous $f(Z)$ entre $-\infty$ et Z_1 (aire colorée **fig. 13**).

b) Probabilité d'avoir Z supérieure à une valeur donnée Z_4 [$P(Z > Z_4)$] : elle est donné par $1-\phi(Z_4)$ (aire colorée **fig. 14**). Dans la mesure ou le graphe est symétrique : $1-\phi(Z_4) = \phi(-Z_4)$

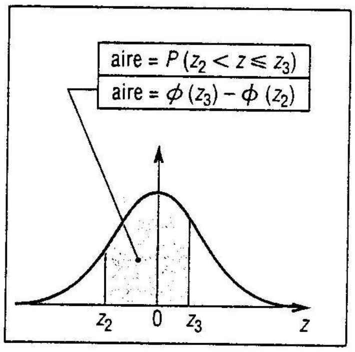
c) Probabilité d'avoir Z comprise entre deux valeurs données Z_2 et Z_3 [$P(Z_2 < Z \leq Z_3)$] : c'est la combinaison des deux cas précédents, obtenue en calculant $\phi(Z_3) - \phi(Z_2)$ (aire colorée **fig. 15**).



13. Probabilité d'avoir Z inférieur à Z_1.



14. Probabilité d'avoir Z supérieur à Z_4.



15. Probabilité d'avoir $Z_2 < Z \leq Z_3$.

Valeurs typiques de $f(Z)$ et $\phi(Z)$									
Z	-3	-2	-1	- 0,5	0	0,5	1	2	3
$f(Z)$	0,004	0,054	0,242	0,352	0,399	0,352	0,242	0,054	0,004
$\phi(Z)$	0,0 013	0,0228	0,1 587	0,3 085	0,5	0,6 915	0,8 413	0,9 772	0,9 987
% population	0,13	2,28	15,87	30,85	50	69,15	84,13	97,72	99,87
% population	0,1	0,5	1	2,5	5	95	97,5	99	99,5
Z	-3,090	-2,576	-2,326	-1,960	-1,645	1,645	1,960	2,326	2,576
$\phi(Z)$	0,001	0,005	0,010	0,025	0,050	0,950	0,975	0,990	0,995

d) Exemple : l'échantillon des 50 diamètres du tableau paragraphe IV.1 est supposé suivre la loi normale avec $\mu = 30{,}00$ mm et un écart type $\sigma = 0{,}057$ mm.

1) Probabilité d'avoir $d \leq 30{,}10$ mm **(fig. 13)**
à $d = 30{,}1$ correspond $Z_1 = (30{,}1 - 30{,}00)/0{,}057 = 1{,}755$
$P(d \leq 30{,}10) = \phi(Z_1) = \phi(1{,}755)$
$= [\phi(1{,}75) + \phi(1{,}760)]/2$ (tableau p. 472)
$= (0{,}959\,9 + 0{,}960\,8)/2 \approx 0{,}960\,4$ ($\approx$ 96% des diamètres)

2) Probabilité d'avoir $d > 29{,}95$ mm **(fig. 14)**
à $d = 29{,}95$ correspond $Z_4 = (29{,}95 - 30{,}00)/0{,}057 = -\,0{,}877$
$P(d \leq 29{,}95) = \phi(Z_4) = 0{,}191\,6$
$P(d > 29{,}95) = 1 - P(d \leq 29{,}95) = 1 - \phi(Z_4)$
$= 1 - 0{,}191\,6 = 0{,}808\,4$ ($\approx$ 81%)

3) Probabilité d'avoir $29{,}95 < d \leqslant 30{,}05$ **(fig. 15)**
$Z_2 = Z_4 = -0{,}877$ et $\phi(Z_2) = 0{,}1916$
Z_3 est symétrique de Z_2 par rapport μ (30,00)
d'ou $Z_3 = -Z_2 = 0{,}877$ et $\phi(Z_3) = 1 - \phi(Z_2)$.
$P\,(29{,}95 < d \leqslant 30{,}05) = \phi(Z_3) - \phi(Z_2) = 1 - \phi(Z_2) - \phi(Z_2)$
$= 1 - 2\phi(Z_2) = 1 - 2.0{,}191\,6 = 0{,}616\,8$ ($\approx$ 62 % des diamètres)

4. Méthode pour vérifier qu'un ensemble de données suit la loi normale

La méthode la plus pratique consiste à utiliser un logiciel ou un graphe prévu pour cet usage. En ordonnée on porte la probabilité cumulée (échelle logarithmique) et en abscisse la variable x (échelle arithmétique).

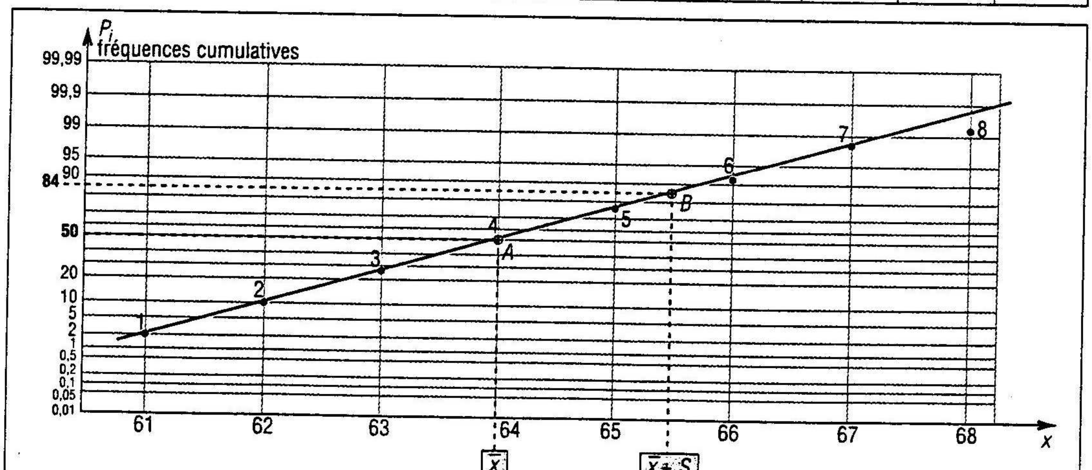
a) Méthode : exemple fig. 16.
Calculer la moyenne arithmétique et l'écart-type de l'ensemble des données.
Tracer le point A correspondant à la moyenne (probabilité $P = 0{,}5$).
Tracer le point B correspondant à la moyenne plus l'écart-type ; la probabilité (cumulative) de ce cas est $P = 0{,}84$.
Tracer la droite AB passant par les deux points. Elle servira de référence.
Tracer les autres points sachant que pour chacun :

$$\text{probabilité } P_i = \frac{f_{ci}}{n+1} = \frac{\text{fréquences cumulées jusqu'au point } i}{\text{nombre total des valeurs } + 1}$$

Si les points restent proches de la droite de référence AB, alors la distribution étudiée suit la loi normale.

b) Exemple : prélèvement d'un échantillon de 89 objets dans une production dont on contrôle périodiquement la masse, en grammes.

Données échantillon : $n = 89$; $S = 1{,}52$ g ; masse moyenne 63,95 g								
intervalles des valeurs : de à (non inclus)	60 61	61 62	62 63	63 64	64 65	65 66	66 67	67 68
fréquences f_i (nbre d'unités)	2	7	15	21	22	15	5	2
fréquences cumulées f_{c_i}	2	9	24	45	67	82	87	89
$P_i = \frac{f_{c_i}}{n+1}$	0,022 2	0,100	0,266	0,500	0,744	0,911	0,967	0,989
numéro du point **(fig. 16)**	1	2	3	4	5	6	7	8



16. Exemple de graphe permettant de vérifier qu'un ensemble de données suit la loi normale.

Loi normale (Gauss) - Distribution ou probabilité cumulative - Fonction $\phi(Z)$

Z	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
− 6	$0{,}0^{9}987$	$0{,}0^{9}530$	$0{,}0^{9}282$	$0{,}0^{9}149$	$0{,}0^{10}78$	$0{,}0^{10}40$	$0{,}0^{10}21$	$0{,}0^{10}10$	$0{,}0^{11}52$	$0{,}0^{11}26$
− 5	$0{,}0^{6}287$	$0{,}0^{6}170$	$0{,}0^{7}996$	$0{,}0^{7}579$	$0{,}0^{7}333$	$0{,}0^{7}190$	$0{,}0^{7}107$	$0{,}0^{8}599$	$0{,}0^{8}332$	$0{,}0^{8}182$
− 4	$0{,}0^{4}317$	$0{,}0^{4}207$	$0{,}0^{4}133$	$0{,}0^{5}854$	$0{,}0^{5}541$	$0{,}0^{5}340$	$0{,}0^{5}211$	$0{,}0^{5}130$	$0{,}0^{6}793$	$0{,}0^{6}479$
− 3	0.00135	$0{,}0^{3}968$	$0{,}0^{3}687$	$0{,}0^{3}483$	$0{,}0^{3}337$	$0{,}0^{3}233$	$0{,}0^{3}159$	$0{,}0^{3}108$	$0{,}0^{4}723$	$0{,}0^{4}481$

Z	0,0	0,01	0,02	0,03	0,04	0.05	0,06	0,07	0,08	0,09
− 3,5	0,00023	0,00022	0.00022	0,00021	0,00020	0,00019	0,00019	0,00018	0,00017	0,00017
− 3,4	0,00034	0.00033	0,00031	0,00030	0,00029	0,00028	0,00027	0,00026	0,00025	0,00024
− 3,3	0,00048	0,00047	0.00045	0,00043	0,00042	0,00040	0,00039	0,00038	0,00036	0,00035
− 3,2	0,00069	0,00066	0,00064	0,00062	0,00060	0,00058	0,00056	0,00054	0,00052	0,00050
− 3,1	0,00097	0,00094	0,00090	0,00087	0,00085	0,00082	0,00079	0,00076	0,00074	0,00071
− 3,0	0,00135	0,00131	0,00126	0,00122	0,00118	0,00114	0,00111	0,00107	0,00104	0,00100
− 2,9	0,0019	0,0018	0,0017	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014
− 2,8	0,0026	0,0025	0,0024	0,0023	0,0023	0,0022	0,0021	0,0021	0,0020	0,0019
− 2,7	0,0035	0,0034	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026
− 2,6	0,0047	0,0045	0,0044	0,0043	0,0041	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036
− 2,5	0,0062	0,0060	0,0059	0,0057	0,0055	0,0054	0,0052	0,0051	0,0049	0,0048
− 2,4	0,0082	0,0080	0,0078	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0068	0,0066	0,0064
− 2,3	0,0107	0,0104	0,0102	0,0099	0,0096	0,0094	0,0091	0,0089	0,0087	0,0084
− 2,2	0,0139	0,0136	0,0132	0,0129	0,0125	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110
− 2,1	0,0179	0,0174	0,0170	0,0166	0,0162	0,0158	0,0154	0,0150	0,0146	0,0143
− 2,0	0,0228	0,0222	0,0217	0,0212	0,0207	0,0202	0,0197	0,0192	0,0188	0,0183
− 1,9	0,0287	0,0281	0,0274	0,0268	0,0262	0,0256	0,0250	0,0244	0,0239	0,0233
− 1,8	0,0359	0,0351	0,0344	0,0336	0,0329	0,0322	0,0314	0,0307	0,0301	0,0294
− 1,7	0,0446	0,0436	0,0427	0,0418	0,0409	0,0401	0,0392	0,0384	0,0375	0,0367
− 1,6	0,0548	0,0537	0,0526	0,0516	0,0505	0,0495	0,0485	0,0475	0,0465	0,0455
− 1,5	0,0668	0,0655	0,0643	0,0630	0,0618	0,0606	0,0594	0,0582	0,0571	0,0559
− 1,4	0,0808	0,0793	0,0778	0,0764	0,0749	0,0735	0,0721	0,0708	0,0694	0,0581
− 1,3	0,0968	0,0951	0,0934	0,0918	0,0901	0,0885	0,0869	0,0853	0,0838	0,0823
− 1,2	0,1151	0,1131	0,1112	0,1093	0,1075	0,1057	0,1038	0,1020	0,1003	0,0985
−1,1	0,1357	0,1335	0,1314	0,1292	0,1271	0,1251	0,1230	0,1210	0,1190	0,1170
− 1,0	0,1587	0,1562	0,1539	0,1551	0,1492	0,1469	0,1446	0,1423	0,1401	0,1379
− 0,9	0,1841	0,1814	0,1788	0,1762	0,1736	0,1711	0,1685	0,1660	0,1635	0,1611
− 0,8	0,2119	0,2090	0,2061	0,2033	0,2005	0,1977	0,1949	0,1922	0,1894	0,1867
− 0,7	0,2420	0,2389	0,2358	0,2327	0,2297	0,2266	0,2236	0,2207	0,2177	0,2148
− 0,6	0,2743	0,2709	0,2676	0,2643	0,2611	0,2578	0,2546	0,2514	0,2483	0,2451
− 0,5	0,3085	0,3050	0,3015	0,2981	0,2946	0,2912	0,2877	0,2843	0,2810	0,2776
− 0,4	0,3446	0,3409	0,3372	0,3336	0,3300	0,3264	0,3228	0,3192	0,3156	0,3121
− 0,3	0,3821	0,3783	0,3745	0,3707	0,3669	0,3632	0,3594	0,3557	0,3520	0,3483
− 0,2	0,4207	0,4168	0,4129	0,4090	0,4052	0,4013	0,3974	0,3936	0,3897	0,3859
− 0,1	0,4602	0,4562	0,4522	0,4483	0,4443	0,4404	0,4364	0,4325	0,4286	0,4247
− 0,0	0,5000	0,4960	0,4920	0,4880	0,4840	0,4801	0,4761	0,4721	0,4681	0,4641

Z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
+ 0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
+ 0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
+ 0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
+ 0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
+ 0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6672	0,6808	0,6844	0,6870
+ 0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
+ 0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
+ 0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
+ 0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8079	0,8106	0,8133
+ 0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
+ 1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
+ 1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
+ 1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
+ 1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
+ 1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
+ 1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
+ 1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
+ 1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
+ 1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
+ 1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
+ 2,0	0,9773	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
+ 2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
+ 2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
+ 2,3	0,9893	0,9896	0,9998	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
+ 2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
+ 2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
+ 2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
+ 2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
+ 2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
+ 2,9	0,9981	0,9982	0,9983	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
+ 3,0	0,99865	0,99869	0,99874	0,99878	0,99882	0,99886	0,99889	0,99893	0,99896	0,99900
+ 3,1	0,99903	0,99906	0,99910	0,99913	0,99915	0,99918	0,99921	0,99924	0,99926	0,99929
+ 3,2	0,99931	0,99934	0,99936	0,99938	0,99940	0,99942	0,99944	0,99946	0,99948	0,99950
+ 3,3	0,99952	0,99953	0,99955	0,99957	0,99958	0,99960	0,99961	0,99962	0,99964	0,99965
+ 3,4	0,99966	0,99967	0,99969	0,99970	0,99971	0,99972	0,99973	0,99974	0,99975	0,99976
+ 3,5	0,99977	0,99978	0,99978	0,99979	0,99980	0,99981	0,99981	0,99982	0,99983	0,99983

VII - Distribution binomiale

Utilisée avec des variables discrètes, non continues, la loi binomiale est souvent employée en contrôle de qualité lorsque la taille de la population est grande comparativement à celle de l'échantillon.

1. Équation de la distribution (fréquence ou densité de population)

En faisant n tentatives ou essais, la probabilité d'avoir exactement x chances ou succès ($x = 0$, 1, 2... ou n), pour un événement dont la probabilité de se produire est p (p étant constante), est donnée par :

$$P(x) = \frac{n!}{x!(n-x)!} \cdot p^x \cdot (1-p)^{n-x}$$
$$\text{avec } 0 \leqslant x \leqslant n$$

valeur moyenne	écart-type
$\bar{x} = n.p$ (ou μ)	$S = [n.p(1-p)]^{0,5}$ (ou σ)

a) Remarques :

Il y a n tentatives ou essais.
Les essais répétés sont indépendants les uns des autres.
Chaque essai a seulement deux résultats possibles : succès ou échec, bon ou mauvais...
La probabilité p de l'événement reste constante d'essai en essai ; elle n'est pas conditionnée par l'essai précédent. $(1 - p)$ représente la probabilité contraire.

b) Exemple : au jeu pile ou face, quelle est la probabilité d'avoir 3 fois le côté face en lançant 5 fois la pièce ?

$p = 0,5$ (on a une chance sur deux d'avoir le côté face à chaque lancer)
$x = 3$ (on veut avoir trois fois le côté face)
$n = 5$ (5 tentatives car on lance 5 fois la pièce)

$$P(3) = \frac{5!}{3!\,(5-3)!}\; 0,5^3\,(1-0,5)^{5-3}$$
$$= 10.0,031\,25 = 0,3125 \quad (31,25\ \%\ \text{de chances})$$

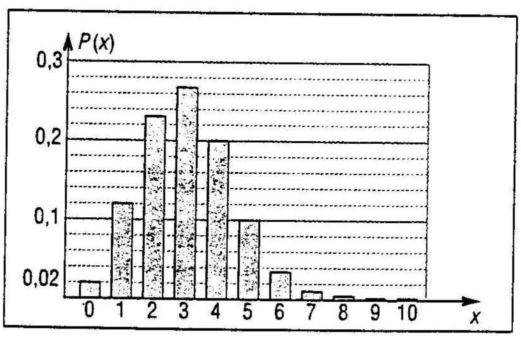
La probabilité d'avoir 2 fois le coté face est $P(2) = P(3) = 0,3125$.

2. Allure de la distribution binomiale

Exemple :

cas $n = 10$ avec $p = 0,3$ ($1 - p = 0,7$). Les valeurs de la distribution sont indiquées ci dessous (allure **fig. 17**).

La somme de toutes les valeurs $P(x)$ du tableau (0,028 2 + 0,121 1 +...) est égale à 1.
Écart-type : $\sigma = [10.0,3.0,7]^{0,5} = 1,449$
Moyenne : $np = 10.0,3 = 3$



17. Distribution de la loi binomiale avec $n = 10$ et $p = 0,3$.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(x)$	0,028 2	0,121 1	0,233 5	0,266 8	0,200 1	0,102 9	0,036 8	0,009 0	0,001 4	0,000 1	≈ 0

3. Approximation de la loi binomiale par la loi normale

La loi normale présente l'avantage de n'avoir qu'un paramètre et d'être tabulée (tableau p. 472).

L'approximation est bonne si n est grand ($n.p > 10$ et $p < 0,5$). La précision est acceptable si $0,1 \leqslant p \leqslant 0,9$.

Exemple : un grossiste en fruits reçoit 3 200 melons dont 22 % ne sont pas encore mûrs. Les melons sont répartis dans des caisses pouvant contenir 50 melons. Quelle est la probabilité d'avoir de 10 à 13 melons non mûrs par caisse ?

Chaque caisse représente un échantillon de 50 melons. On peut selon les cas avoir 10, 11, 12 ou 13 melons non mûrs par caisse (4 cas possibles accumulés).

1) Avec la loi binomiale ($n = 50$; $p = 0,22$; $1 - p = 0,78$) on obtient :

$$P(10 \leqslant x \leqslant 13) = P(10) + P(11) + P(12) + P(13) = \sum_{i=10}^{13} \frac{50!}{x!\,(50-x)!} \,.\, 0,22^{x}.0,78^{50-x}$$

$$= 0,131\,7 + 0,135\,1 + 0,123\,8 + 0,102\,1 = 0,491\,7$$

2) Avec la loi normale ($np = 50.0,22 = 11$) :
Écart-type $= [np\,(1-p)]^{0,5} = [50.0,22.0,78]^{0,5} = 2,929$
Moyenne $= np = 11$

$$P(10 \leqslant x \leqslant 13) = \phi\left[\frac{(13+0,5)-11}{2,929}\right] - \phi\left[\frac{(10-0,5)-11}{2,929}\right]$$

$$= \phi\,(0,853) - \phi\,(-0,512) = 0,803\,1 - 0,304\,3$$

$$= 0,498\,8$$ (49,88 %, résultat très proche du précédent)

Remarque : les valeurs de 0,5 ajoutées à 13 et retranchées à 10 permettent de faire les corrections nécessaires de continuité entre intervalles.

Forme générale des corrections de continuité

avec $\mu = np$ et $\sigma = [np(1-p)]^{0,5}$

$$P(a) = \phi\left[\frac{(a+0,5)-\mu}{\sigma}\right] - \phi\left[\frac{(a-0,5)-\mu}{\sigma}\right]$$

$$P(a \leqslant x \leqslant b) = \phi\left[\frac{(b+0,5)-\mu}{\sigma}\right] - \phi\left[\frac{(a-0,5)-\mu}{\sigma}\right]$$

VIII - Loi ou distribution de Poisson

C'est l'une des distributions les plus utilisées avec les variables discrètes (non continues). Elle est souvent utilisée comme approximation de la loi binomiale lorsque n est grand et p petit. Principal avantage : un seul paramètre (μ) qui la rend facilement tabulable et exploitable (voir tableau p. 476).

1. Caractéristiques de la distribution

n est le nombre de tentatives, x le nombre de chances ou de succès, p la probabilité de l'événement et $\mu = np$ le paramètre.

Exemple 1 : des échantillons de 100 objets sont régulièrement prélevés dans une production pour passer un contrôle final de qualité. La moyenne des défauts est de 2 %. Quelle est la probabilité d'avoir 3 défauts dans l'un des échantillons ?

Équation générale $[0 \leqslant x \leqslant \infty]$ (densité de population)	Valeur moyenne	Écart-type
$P(x) = \dfrac{\mu^{x}.e^{-\mu}}{x!}$	$\mu = n.p$	$\sigma = \mu^{0.5}$ $\sigma = [n.p]^{0,5}$

$n = 100$; $p = 0{,}02$; $\mu = np = 2$ et $x = 3$

$$P(3) = \frac{2^3.e^{-2}}{3!} = 0{,}180\ 4 \text{ (soit 18,04 \%)}$$

Avec le tableau page 476 : ($\mu = 2$) : $P(3) = Pc(3) - Pc(2) = 0{,}857 - 0{,}677 = 0{,}180$

Exemple 2 : le nombre des défauts concernant les connexions des composants d'une carte électronique suit la loi de Poisson avec $\mu = 2$. Quelle est la probabilité qu'une carte prise au hasard puisse avoir deux défauts ou moins ?

Une carte peut avoir 0, 1 ou 2 défauts, les trois cas s'accumulent.

$P(x \leqslant 2) = P(0) + P(1) + P(2)$

$$= \frac{2^0.e^{-2}}{0!} + \frac{2^1.e^{-2}}{1!} + \frac{2^2.e^{-2}}{2!}$$

$= 0{,}135\ 3 + 0{,}270\ 7 + 0{,}270\ 7 = 0{,}676\ 6$ (67,66%)

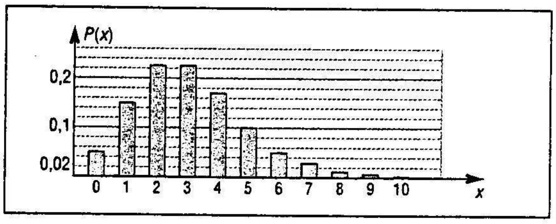
Avec le tableau page 476, ($\mu = 2$ et $x = 2$) : $P(x \leqslant 2) = Pc(2) = 0{,}677$

2. Allure de la distribution de Poisson

Exemple : allure de la distribution pour $\mu = 3$. À noter pour la figure 18 la forme dissymétrique avec une sorte de queue sur la droite.

Valeurs de la distribution de Poisson pour $\mu = 3$											
x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(x)$	0,050	0,149	0,224	0,224	0,168	0,101	0,050	0,022	0,008	0,003	0,001

Remarque : aux grandes valeurs de μ ($\mu \geqslant 10$) la distribution devient symétrique et semblable à la loi normale. Pour ces valeurs, la distribution de Poisson est souvent approximée par la loi normale.



18. Distribution de la loi de Poisson.

3. Approximation de la loi de Poisson par la loi normale ($\mu \geqslant 10$).

Exemple : le nombre d'ouragans par an dans certains départements français d'outre mer suit la loi de Poisson avec pour moyenne $\mu = 12$. Quelle est la probabilité d'avoir entre 10 et 14 ouragans dans l'année ?

1) Par la loi de Poisson et en utilisant le tableau page 476 ($\mu = 12$) :

$P(10 \leqslant x \leqslant 14) = Pc(14) - Pc(9) = 0{,}772 - 0{,}242 = 0{,}530$ (53,0 % de chances)

2) À partir de la loi normale

$\mu = np = 12$; $\sigma = [np]^{1/2} = [12]^{1/2} = 3{,}464$

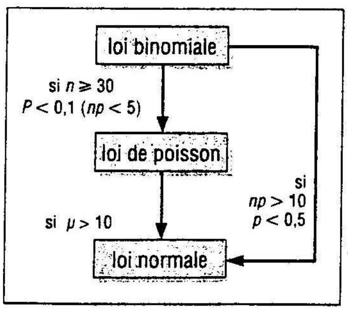
En tenant compte de la continuité (0,5 ajouté à 14 et 0,5 retranché à 10)

$$P(10 \leqslant x \leqslant 14) = \phi\left[\frac{(14 + 0{,}5) - 12}{3{,}464}\right] - \phi\left[\frac{(10 - 0{,}5) - 12}{3{,}464}\right]$$

$= \phi(0{,}721\ 7) - \phi(-0{,}721\ 7)$

$= 0{,}764\ 7 - 0{,}235\ 3 = 0{,}530$ (53,0 % de chances)

(même résultat que précédemment)



19. Approximation entre les lois...

Valeurs cumultatives $Pc(x)$ de la distribution de Poisson

x \ μ	0,01	0,05	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0	0,990	0,951	0,905	0,819	0,741	0,670	0,607	0,549	0,497	0,449	0,407
1	1,000	0,999	0,995	0,982	0,963	0,938	0,910	0,878	0,844	0,809	0,772
2		1,000	1,000	0,999	0,996	0,992	0,986	0,977	0,966	0,953	0,937
3				1,000	1,000	0,999	0,998	0,997	0,994	0,991	0,987
4						1,000	1,000	1,000	0,999	0,999	0,998
5									1,000	1,000	1,000

x \ μ	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0
0	0,368	0,333	0,301	0,273	0,247	0,223	0,202	0,183	0,165	0,150	0,135
1	0,736	0,699	0,663	0,627	0,592	0,558	0,525	0,493	0,463	0,434	0,406
2	0,920	0,900	0,879	0,857	0,833	0,809	0,783	0,757	0,731	0,704	0,677
3	0,981	0,974	0,966	0,957	0,946	0,934	0,921	0,907	0,891	0,875	0,857
4	0,996	0,995	0,992	0,989	0,986	0,981	0,976	0,970	0,964	0,956	0,947
5	0,999	0,999	0,998	0,998	0,997	0,996	0,994	0,992	0,990	0,987	0,983
6	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	0,999	0,999	0,998	0,997	0,997	0,995
7					1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	0,999	0,999
8									1,000	1,000	1,000

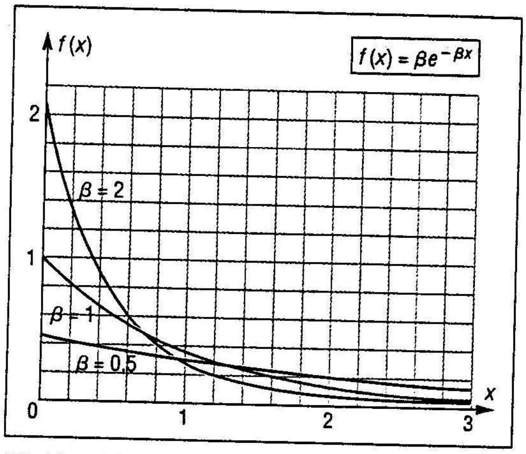
x \ μ	2,2	2,4	2,6	2,8	3,0	3,2	3,4	3,6	3,8	4,0	4,2
0	0,111	0,091	0,074	0,061	0,050	0,041	0,033	0,027	0,022	0,018	0,015
1	0,355	0,308	0,267	0,231	0,199	0,171	0,147	0,126	0,107	0,092	0,078
2	0,623	0,570	0,518	0,469	0,423	0,380	0,340	0,303	0,269	0,238	0,210
3	0,819	0,779	0,736	0,692	0,647	0,603	0,558	0,515	0,473	0,433	0,395
4	0,928	0,904	0,877	0,848	0,815	0,781	0,744	0,706	0,668	0,629	0,590
5	0,975	0,964	0,951	0,935	0,916	0,895	0,871	0,844	0,816	0,785	0,753
6	0,993	0,988	0,983	0,976	0,966	0,955	0,942	0,927	0,909	0,889	0,867
7	0,998	0,997	0,995	0,992	0,988	0,983	0,977	0,969	0,960	0,949	0,936
8	1,000	0,999	0,999	0,998	0,996	0,994	0,992	0,988	0,984	0,979	0,972
9		1,000	1,000	0,999	0,999	0,998	0,997	0,996	0,994	0,992	0,989
10				1,000	1,000	1,000	0,999	0,999	0,998	0,997	0,996
11							1,000	1,000	0,999	0,999	0,999
12									1,000	1,000	1,000

x \ μ	4,4	4,6	4,8	5,0	5,5	6,0	6,5	7,0	7,5	8,0	9,0
0	0,012	0,010	0,008	0,007	0,004	0,002	0,002	0,001	0,001		
1	0,066	0,056	0,048	0,040	0,027	0,017	0,011	0,007	0,005	0,003	0,001
2	0,185	0,163	0,143	0,125	0,088	0,062	0,043	0,030	0,020	0,014	0,006
3	0,359	0,326	0,294	0,265	0,202	0,151	0,112	0,082	0,059	0,042	0,021
4	0,551	0,513	0,476	0,440	0,358	0,285	0,224	0,173	0,132	0,100	0,055
5	0,720	0,686	0,651	0,616	0,529	0,446	0,369	0,301	0,241	0,191	0,116
6	0,844	0,818	0,791	0,762	0,686	0,606	0,527	0,450	0,378	0,313	0,207
7	0,921	0,905	0,887	0,867	0,809	0,744	0,673	0,599	0,525	0,453	0,324
8	0,964	0,955	0,944	0,932	0,894	0,847	0,792	0,729	0,662	0,593	0,456
9	0,985	0,980	0,975	0,968	0,946	0,916	0,877	0,830	0,776	0,717	0,587
10	0,994	0,992	0,990	0,986	0,975	0,957	0,933	0,901	0,862	0,816	0,706
11	0,998	0,997	0,996	0,995	0,989	0,980	0,966	0,947	0,921	0,888	0,803
12	0,999	0,999	0,999	0,998	0,996	0,991	0,984	0,973	0,957	0,936	0,876
13	1,000	1,000	1,000	0,999	0,998	0,996	0,993	0,987	0,978	0,966	0,926
14				1,000	0,999	0,999	0,997	0,994	0,990	0,983	0,959
15					1,000	0,999	0,999	0,998	0,995	0,992	0,978
16						1,000	1,000	0,999	0,998	0,996	0,989
17								1,000	0,999	0,998	0,995
18									1,000	0,999	0,998
19										1,000	0,999
20											1,000

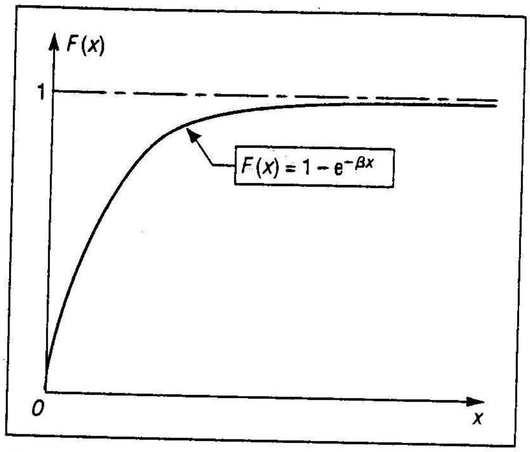
x \ μ	10,0	11,0	12,0	13,0	14,0	15,0	16,0	17,0	18,0	19,0	20,0
2	0,003	0,001	0,001								
3	0,010	0,005	0,002	0,001							
4	0,029	0,015	0,008	0,004	0,002	0,001					
5	0,067	0,038	0,020	0,011	0,006	0,003	0,001	0,001			
6	0,130	0,079	0,046	0,026	0,014	0,008	0,004	0,002	0,001	0,001	
7	0,220	0,143	0,090	0,054	0,032	0,018	0,010	0,005	0,003	0,002	0,001
8	0,333	0,232	0,155	0,100	0,062	0,037	0,022	0,013	0,007	0,004	0,002
9	0,458	0,341	0,242	0,166	0,109	0,070	0,043	0,026	0,015	0,009	0,005
10	0,583	0,460	0,347	0,252	0,176	0,118	0,077	0,049	0,030	0,018	0,011
11	0,697	0,579	0,462	0,353	0,260	0,185	0,127	0,085	0,055	0,035	0,021
12	0,792	0,689	0,570	0,463	0,358	0,268	0,193	0,135	0,092	0,061	0,039
13	0,864	0,781	0,682	0,573	0,464	0,363	0,275	0,201	0,143	0,098	0,066
14	0,917	0,854	0,772	0,675	0,570	0,466	0,368	0,281	0,208	0,150	0,105
15	0,951	0,907	0,844	0,764	0,669	0,568	0,467	0,371	0,287	0,215	0,157
16	0,973	0,944	0,899	0,835	0,756	0,664	0,566	0,468	0,375	0,292	0,221
17	0,986	0,968	0,937	0,890	0,827	0,749	0,659	0,564	0,469	0,378	0,297
18	0,993	0,982	0,963	0,930	0,883	0,819	0,742	0,655	0,562	0,469	0,381
19	0,997	0,991	0,979	0,957	0,923	0,875	0,812	0,736	0,651	0,561	0,470
20	0,998	0,995	0,988	0,975	0,952	0,917	0,868	0,805	0,731	0,647	0,559
21	0,999	0,998	0,994	0,986	0,971	0,947	0,911	0,861	0,799	0,725	0,644
22	1,000	0,999	0,997	0,992	0,983	0,967	0,942	0,905	0,855	0,793	0,721
23		1,000	0,999	0,996	0,991	0,981	0,963	0,937	0,899	0,849	0,787
24			0,999	0,998	0,995	0,989	0,978	0,959	0,932	0,893	0,843
25			1,000	0,999	0,997	0,994	0,987	0,975	0,955	0,927	0,888
26				1,000	0,999	0,997	0,993	0,985	0,972	0,951	0,922
27					0,999	0,998	0,996	0,991	0,983	0,969	0,948
28					1,000	0,999	0,998	0,995	0,990	0,980	0,966
29						1,000	0,999	0,997	0,994	0,988	0,978
30							0,999	0,999	0,997	0,993	0,987
31							1,000	0,999	0,998	0,996	0,992
32								1,000	0,999	0,998	0,995
33									1,000	0,999	0,997
34										0,999	0,999
35										1,000	0,999
36											1,000

IX - Distribution exponentielle

Le modèle exponentiel est souvent utilisé dans les études de fiabilité, β étant le taux de pannes. Il permet aussi de représenter des durées de vie...
La distribution dépend du seul paramètre β :



20. Allure de la distribution exponentielle en fonction de β.



21. Allure des fréquences cumulatives de la distribution exponentielle.

Équation générale $[x \geq 0]$ (densité de population)	Valeur moyenne	Écart-type
$f(x) = \beta.e^{-\beta.x}$	$\mu = \dfrac{1}{\beta}$	$\sigma = \dfrac{1}{\beta}$
Fréquence de distribution cumulative Équation générale: $F(x) = 1 - e^{-\beta.x}$ (allure **fig. 21**)		

Exemple : la durée de vie de composants électroniques de puissance, en milliers d'heures, a une forme exponentielle ; le taux de défaillance est $\beta = 0,333 = 1/3$: une défaillance chaque 3 000 heures.

1) Quelle est la probabilité qu'un composant dépasse 3 000 heures ?
$P(X > 3) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - F(3) = 1 - (1 - e^{-3.0,333}) = e^{-1} = 0,368$
(36,8 % de chances, résultat indépendant de β).

2) Quelle est la probabilité que le composant dure entre 1 000 et 3 000 heures ?
$P(1 \leq X \leq 3) = F(3) - F(1) = (1 - e^{-3.0,333}) - (1 - e^{-1.0,333})$
$= - 0,367\,8 + 0,716\,8 = 0,349\,0$ (34,9 % de chances)

3) Quelle est la probabilité que le composant dure 1 000 heures de plus après 3 000 heures de fonctionnement ?
C'est une probabilité conditionnelle.
Forme générale : $P(X > b/X > a) = P(X > b - a)$
$P(X > 4/X > 3) = P(X > 1) = e^{-1.0.333} = 0,716\,8$.
C'est aussi la probabilité qu'un composant neuf dure 1 000 heures.

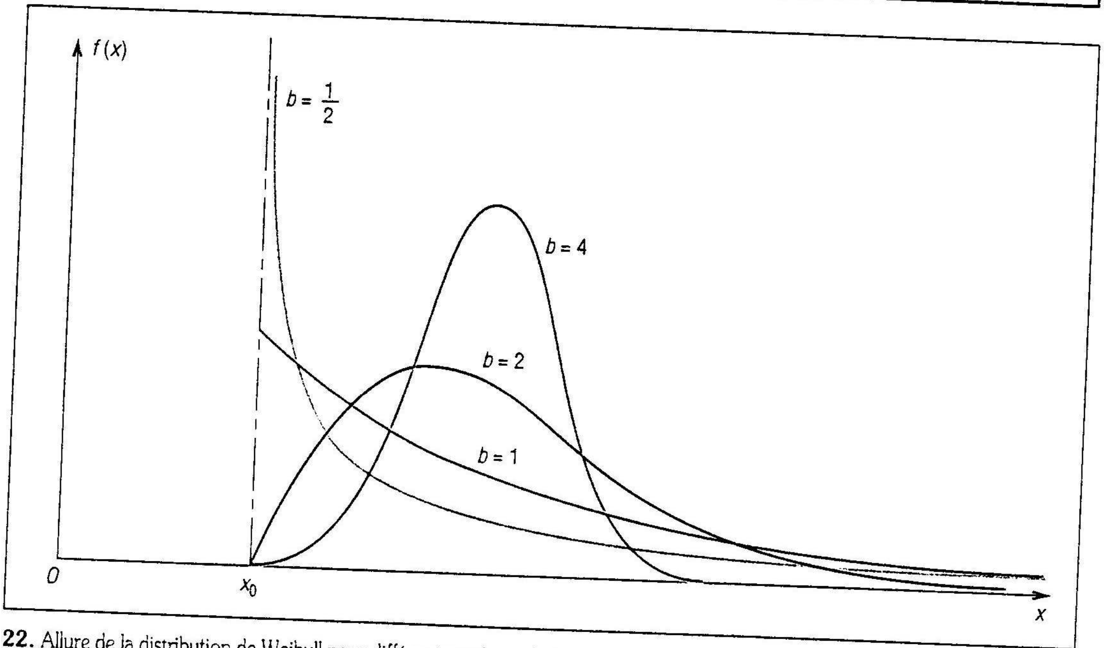
Remarque : avec un taux de panne β constant, les chances d'avoir une défaillance restent toujours les mêmes. Que le composant soit neuf ou non, qu'il ait déja servi longtemps ou non, la fiabilité reste la même.

X - Distribution ou loi de Weibull

C'est une sorte de loi caméléon grâce à ses trois paramètres, très souple, qui peut s'ajuster à un grand nombre de données statistiques : elle peut suivre une distribution non symétrique, faire l'approximation de la loi normale, devenir une distribution exponentielle....
Elle fut, à l'origine, utilisée pour décrire les phénomènes de fatigue. Elle est aujourd'hui employée pour décrire des durées de vie (roulements, engrenages, composants électroniques, etc.), des probabilités de rupture sous charge de certains matériaux...

1. Caractéristiques de la loi de Weibull à trois paramètres

Équation générale [$x \geqslant X_0$] (allure fig. 22)	**Écart-type**
$f(x) = \dfrac{b}{\alpha}\left[\dfrac{x - X_0}{\alpha}\right]^{b-1}.\exp\left[-\left[\dfrac{x - X_0}{\alpha}\right]^{b}\right]$	$\alpha.\left[\Gamma\left[\dfrac{2}{b} + 1\right] - \Gamma^2\left[\dfrac{1}{b} + 1\right]\right]^{0,5}$
Paramètres X_0 est le paramètre de position ($-\infty \leqslant X_0 \leqslant \infty$) α est le paramètre d'échelle ($\alpha > 0$) b est le paramètre de forme ($b > 0$), sans unité Γ est la fonction Gamma (tableau ci-dessous)	**Valeur moyenne** $\eta = X_0 + \alpha.\Gamma\left[\dfrac{1}{b} + 1\right]$



22. Allure de la distribution de Weibull pour différentes valeurs de b.

Fonction $\Gamma(x)$										
si k est un nombre entier (1, 2 ...) : $\Gamma(k) = (k-1)!$ (avec $k \geqslant 1$)										
x	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	
$\Gamma(x)$	1,000	0,951	0,918	0,897	0,887	0,886	0,893	0,908	0,931	0,961	
x	2,0	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9	3,0
$\Gamma(x)$	1,000	1,046	1,101	1,166	1,242	1,329	1,429	1,544	1,676	1,827	2,00

2. Fréquence de distribution cumulative $F(x)$

La loi de Weibull est la plus utilisée sous cette forme.

Remarque : en fiabilité, x représente le temps t, $F(t)$ la fonction défaillance, et $R(t)$ la fonction fiabilité.

$F(x) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{x - X_0}{\alpha}\right)^b\right]$ (si $x \geq X_0$)
$R(x) = 1 - F(x) = \exp\left[-\left(\frac{x - X_0}{\alpha}\right)^b\right]$

Exemple : un composant mécanique possède une durée de vie qui suit la loi de Weibull avec $X_0 = 0$, $b = 0{,}25$ (1/4) et $\alpha = 120$ heures.

1) Déterminons le temps moyen entre les défaillances :

$$t_{\text{moyen}} = \mu = X_0 + \alpha.\Gamma\left[\frac{1}{b} + 1\right] = 0 + 120.\Gamma(4 + 1) = 120.(4!) = 2\,880 \text{ heures.}$$

2) Quelle est la probabilité que le composant tombe en panne avant 3 600 heures :

$$F(t) = F(3\,600) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{3\,600}{120}\right)^{0{,}25}\right] = 1 - e^{-2{,}34} = 1 - 0{,}096 = 0{,}904 \text{ (soit 90,4 \%)}$$

3. Caractéristiques de la loi de Weibull à deux paramètres

C'est la loi précédente avec $X_0 = 0$ (cas ou l'origine est connue). Si $x = \alpha$, $F(x) = 0{,}632$.

Équation générale ($x > 0$)	Fréquence cumulative
$f(x) = \frac{b}{\alpha}\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{b-1}.\exp\left[-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^b\right]$	$F(x) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^b\right]$

XI - Combinaisons de distributions (addition, soustraction...)

Il est fréquent qu'une grandeur F soit la combinaison de une, deux ou plusieurs variables indépendantes, chacune de ces variables ayant sa propre distribution statistique avec moyenne et écart-type. Quelques cas usuels sont indiqués dans le tableau ci-dessous, des combinaisons de ces cas sont également possibles.

Moyenne et écart-type de quelques combinaison de fonctions

fonction F	moyenne μ_f	écart-type σ_f	coefficient de dispersion C_f
F = constante = K	K	0	0
$F = x$	$\bar{x}$	σ_x	$\sigma_x / \bar{x} = Cx$
$F = K.x$	$K.\bar{x}$	$K.\sigma_x$	$\sigma_x / \bar{x}$
$F = x + K$	$\bar{x} + K$	σ_x	σ_x / μ_f
$F = x + y$	$\bar{x} + \bar{y}$	$[\sigma_x^2 + \sigma_y^2]^{0,5}$	σ_f / μ_f
$F = x - y$	$\bar{x} - \bar{y}$	$[\sigma_x^2 + \sigma_y^2]^{0,5}$	σ_f / μ_f
$F = \frac{1}{x}$	$1/\bar{x}$	$\sigma_x^2 / \bar{x}^2$	Cx
$F = x.y$	$\bar{x}.\bar{y}$	$[\bar{x}^2.\sigma_y^2 + \bar{y}^2.\sigma_x^2]^{0,5}$	$[Cx^2 + Cy^2]^{0,5}$
$F = \frac{x}{y}$	$\bar{x}/\bar{y}$	$(1/\bar{y}^2).[\bar{x}^2.\sigma_y^2 + \bar{y}^2.\sigma_x^2]^{0,5}$	$[Cx^2 + Cy^2]^{0,5}$
$F = x^2$	$\bar{x}^2$	$\sqrt{2}.\bar{x}.\sigma_x = 2.Cx.\bar{x}^2$	$2.Cx$
$F = x^3$	$\bar{x}^3$	$\sqrt{3}.\bar{x}^2.\sigma_x = 3.Cx.\bar{x}^3$	$3.Cx$
$F = x^4$	$\bar{x}^4$	$2.\bar{x}^3.\sigma_x = 4.Cx.\bar{x}^4$	$4.Cx$

a) Exemple 1 : dans la formule de traction $\sigma = F/S$, si la force F et la section S sont des variables aléatoires ou statistiques, alors la contrainte σ est aussi une variable aléatoire ou statistique. De plus, les erreurs ou incertitudes provenant de F et S se propagent sur σ.

b) Propriétés

Si on ajoute, ou on retranche, deux variables dont les distributions suivent la loi normale, le résultat est encore une distribution normale.

Si on multiplie deux variables x et y dont les distributions suivent la loi normale, le résultat est approximativement une distribution normale.

L'approximation est convenable si :

$0{,}1 \leqslant \mu_x/\mu_y \leqslant 10$; $0{,}005 \leqslant Cx \leqslant 0{,}20$; $0{,}005 \leqslant Cy \leqslant 0{,}20$

L'approximation est bonne si $Cx \leqslant 0{,}075$ et $Cy \leqslant 0{,}075$

Le quotient de deux distributions normales x et y est approximativement normale si les conditions précédentes sont vérifiées.

c) Exemple 2 : une barre ronde de diamètre moyen $d_m = 30$ mm est soumise à une charge de flexion. L'écart-type sur le diamètre est de 0,03 mm. Déterminons la moyenne arithmétique et l'écart-type du module de flexion $Iz/v = \pi d^3/32$.

D'après le tableau page 479 (ligne $F = x^3$), le module de flexion moyen s'écrit :

$(Iz/v)_{moy} = \pi \cdot dm^3/32 = \pi . 30^3/32 = 2\,650{,}72$ mm^3

écart-type : $\sigma_I = \sqrt{3}.dm^2.\ \sigma_d = 3^{0,5}.30^2.0{,}03 = 46{,}77$ mm^3

Remarque : si la distribution suit la loi normale 99,7 % de la population est situé dans l'intervalle :

$(Iz/v)_{moy} - 3.\sigma_I \leqslant (99{,}7\ \%\ \text{des}\ Iz/v) \leqslant (Iz/v)_{moy} + 3.\sigma_I$

$2510{,}41 \leqslant Iz/v \leqslant 2791{,}03$

XII - Régression ou ajustement linéaire

L'analyse de régression est souvent utilisée en expérimentation ou en cours d'analyse pour savoir s'il existe une relation ou un rapport entre deux ou plusieurs séries de données collectées. De même, pour des raisons diverses (moyens de mesure ou de contrôle imprécis, etc.), la représentation entre deux séries de données peut être imprécise (graphe avec des points plus ou moins dispersés, exemple **fig. 23**).

L'analyse de régression permet alors de trouver le meilleure ajustement possible pour une droite de proportionnalité ou pour toute autre courbe.

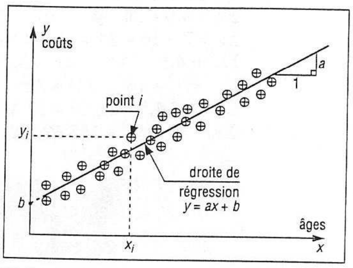
La plus simple des régressions, et la plus largement utilisée, est la régression linéaire basée sur l'équation de la droite : $y = ax + b$.

1. Méthode de travail

Première étape : collecter et classer les données des deux séries statistiques.

Par exemple, pour déterminer le rapport qui peut exister entre l'âge d'une voiture et son coût de maintenance, il faut commencer par collecter des données à partir d'un échantillon significatif de voitures. Les âges des différents véhicules seront repérés par $x_1, x_2, \dots, x_n$ et les coûts par $y_1, y_2, \dots, y_n$.

Deuxième étape : représentation graphique. Tracer les données précédentes sur un repère cartésien de type (x, y). Le résultat donne un graphe de dispersion (graphe avec un nuage de points, **fig. 23**).
Troisième étape : tracer la droite de régression qui sépare le nuage de points en deux zones sensiblement égales. Déterminer les paramètres caractéristiques a (pente de la droite), b (constante) et r (coefficient de corrélation). r permet d'apprécier la qualité de l'approximation.

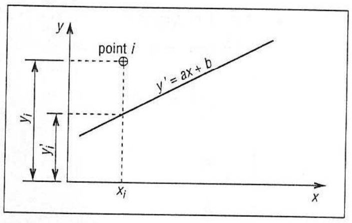


23. Principe de la régression linéaire.

2. Calculs de a, b et r - Méthode des moindres carrés

La méthode des moindres carrés part du principe que la somme $\Sigma(y_i - y_i')^2$ de l'ensemble des points i du nuage (i = 1 à n) doit être aussi petite que possible, yi' étant un point de la droite cherchée **(fig. 24)**.

La somme peut s'écrire $\Sigma[y_i - (ax_i + b)]^2$, après calculs de minimisation on obtient les formules usuelles :



24. Principe de la méthode des moindes carrés.

$$a = \frac{n(\Sigma x_i y_i) - (\Sigma x_i)(\Sigma y_i)}{n(\Sigma x_i^2) - (\Sigma x_i)^2} = \frac{n\Sigma xy - \Sigma x \Sigma y}{n\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2} \text{ (pente de la droite)}$$

$$b = \frac{\Sigma y_i - a.(\Sigma x_i)}{n} = \frac{\Sigma y - a.\Sigma x}{n} \text{ (constante de position)}$$

$$r = \frac{n(\Sigma x_i y_i) - (\Sigma x_i)(\Sigma y_i)}{[n(\Sigma x_i^2) - (\Sigma x_i)^2]^{0,5}.[n(\Sigma y_i^2) - (\Sigma y_i)^2]^{0,5}} = \frac{n\Sigma xy - \Sigma x \Sigma y}{[n(\Sigma x^2) - (\Sigma x)^2]^{0,5}.[n\Sigma y^2 - (\Sigma y)^2]^{0,5}}$$

Propriétés du coefficient de corrélation r :
- La valeur de r est toujours comprise entre −1 et 1 ($-1 \leq r \leq 1$).
- Si $r < 0$, la pente de la droite est négative, et inversement.
- Si $r = 0$, il n'y a pas de corrélation, c'est-à-dire pas de droite possible.
- Si $r = 1$ ou $r = -1$, la corrélation est dite parfaite. Autrement dit, tous les points des données collectés s'alignent parfaitement sur la droite.

On admet que l'on a une bonne corrélation lorsque $r < 0,87$ ou $r < - 0,87$

Exemple : on réalise le test d'un ressort à spires. Les résultats de l'essai sont rassemblés dans le tableau suivant :

charge F (en daN)	7	16	24	32	40	50	60
flèche x (en mm)	4,5	24	40	56	70	90	110
numéro du point	1	2	3	4	5	6	7

Remarque : toutes les valeurs calculées s'obtiennent facilement avec les calculatrices usuelles (touches de fonction ou librairie).

Calculs intermédiaires :

$\sum x_i = 4{,}5 + 24 + 40 + 56 + 70 + 90 + 110 = 394.5$

$\sum y_i = 7 + 16 + 24 + 32 + 40 + 50 + 60 = 229$

$\sum x_i^2 = 4{,}5^2 + 24^2 + 40^2 + 56^2 + 70^2 + 90^2 + 110^2 = 30\,432{,}25$

$\sum y_i^2 = 7^2 + 16^2 + 24^2 + 32^2 + 40^2 + 50^2 + 60^2 = 9\,605$

$\sum x_i y_i = 7.4{,}5 + 16.24 + 24.40 + 32.56 + 40.70 + 50.90 + 60.110 = 17\,067.5$

$(\sum x_i)^2 = 394{,}5^2 = 155\,630{,}25$

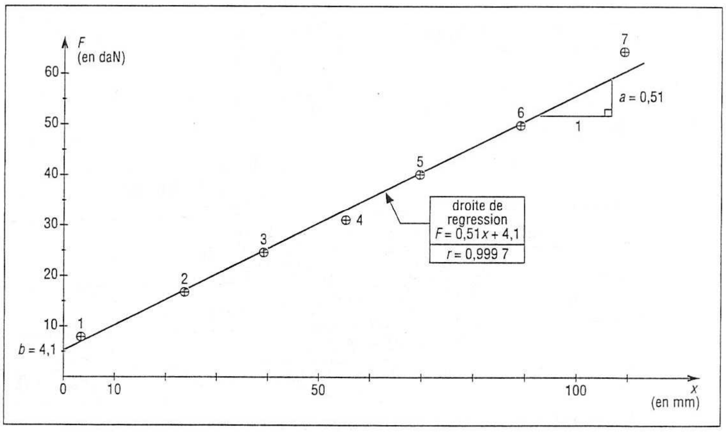
$(\sum y_i)^2 = 229^2 = 52\,441$

$$a = \frac{(7 \times 17\,067{,}5) - (394{,}5 \times 229)}{(7 \times 30\,432{,}25) - 155\,630{,}25} = 0{,}507\,6 \approx 0{,}51$$

$$b = \frac{229 - 0{,}507\,6 \times 394{,}5}{7} = 4{,}170\,4 \approx 4{,}1$$

$$r = \frac{7 \times 17\,067{,}5 - 394{,}5 \times 229}{[7 \times 30\,432{,}25 - 155\,630{,}25]^{0{,}5}[7 \times 9\,605 - 52\,441]^{0{,}5}} = \frac{29\,132}{239{,}574 \times 121{,}63} = 0{,}999\,7$$

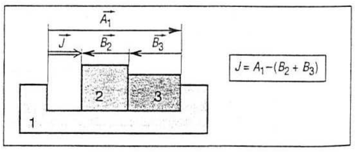
r est très proche de 1 (> 0,87) ce qui indique une très bonne régression.



25. Droite de régression des valeurs du tableau de la page 481.

XIII - Cotation fonctionnelle et statistiques

La cotation fonctionnelle et les chaînes de cotes sont étudiées de manière détaillées dans le chapitre 9 : cotation fonctionnelle. Une fois déterminées toutes les cotes (notées A_i et B_i) d'une même chaîne installant un jeu J, la valeur du jeu moyen (J_{moyen}) peut s'écrire sous la forme d'une différence entre cotes moyennes (exemple **fig. 26**) :



26. Cotation fonctionnelle.

$$J_{moyen} = (A_{1moyen} + A_{2moyen} + \ldots) - (B_{1moyen} + B_{2moyen} + \ldots)$$
$$= \sum A_{i(moyen)} - \sum B_{i(moyen)}$$

1. Cas du système des tolérances absolues ou extrêmes (rappels)

Dans ce système on part du principe que l'intervalle de tolérance sur le jeu (ITJ) est égal à la somme de tous les intervalles de tolérance des cotes de la chaîne :

$\mathrm{IT}J = (\mathrm{IT}A_1 + \mathrm{IT}A_2 + \ldots) + (\mathrm{IT}B_1 + \mathrm{IT}B_2 + \ldots) = \Sigma\,\mathrm{IT}A_i + \Sigma\,\mathrm{IT}B_i = \Sigma\,\mathrm{IT}$ cotes

$\mathrm{IT}J = J_{\text{maxi}} - J_{\text{maxi}}$

$J_{\text{maxi}} = \Sigma A_{i\,\text{maxi}} - \Sigma B_{i\,\text{mini}}$ et $J_{\text{mini}} = \Sigma A_{i\,\text{mini}} - \Sigma B_{i\,\text{maxi}}$

2. Cas d'une répartition statistique des dimensions (loi normale)

Dans ce système, on part du principe que toutes les cotes et le jeu suivent une répartition statistique. Si les cotes A_i et B_i suivent toutes la loi normale, il en est de même du jeu J (voir tableau p. 479 et propriétés annexes) car la somme ou la différence de distributions normales est encore une distribution normale.

Pour chaque cote A_i ou B_i :

$(A_{i\,\text{moyen}} - 3.\sigma A_i) \leqslant 99{,}74$ % des valeurs de $A_i \leqslant (A_{i\,\text{moyen}} + 3.\sigma A_i)$

$(B_{i\,\text{moyen}} - 3.\sigma B_i) \leqslant 99{,}74$ % des valeurs de $B_i \leqslant (B_{i\,\text{moyen}} + 3.\sigma B_i)$

$\mathrm{IT}A_i = 6.\sigma A_i$ et $\mathrm{IT}B_i = 6.\sigma B_i$

$(J_{\text{moyen}} - 3.\sigma J) \leqslant 99{,}74$ % des valeurs du jeu $J \leqslant (J_{\text{moyen}} + 3.\sigma J)$

$\mathrm{IT}\text{jeu} = \mathrm{IT}J = 6.\sigma J$

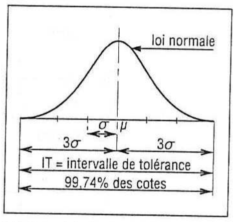
L'intervalle de tolérance sur le jeu ou sur chaque cote A_i ou B_i est égal à 6 fois l'écart-type correspondant (σ).

$\sigma_J = [\Sigma\sigma_{Ai}^{\ 2} + \Sigma\sigma_{Bi}^{\ 2}]^{0,5}$ (tableau page 479)

$\sigma_J^{\ 2} = \Sigma\sigma_{Ai}^{\ 2} + \Sigma\sigma_{Bi}^{\ 2}$

$$\left[\frac{\mathrm{IT}J}{6}\right]^2 = \Sigma\left[\frac{\mathrm{IT}A_i}{6}\right]^2 + \Sigma\left[\frac{\mathrm{IT}B_i}{6}\right]^2$$

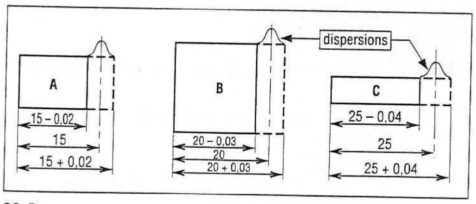
$\mathrm{IT}J^2 = \Sigma\mathrm{IT}A_i^2 + \Sigma\mathrm{IT}B_i^2$



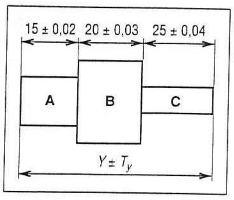
27. Rappel de la loi normale.

$$\boxed{\mathrm{IT}J = [\Sigma\,\mathrm{IT}A_i^{\ 2} + \Sigma\mathrm{IT}B_i^{\ 2}]^{0,5} = [\Sigma\,\mathrm{IT}\text{cotes}^2]^{0,5} = [\mathrm{IT}\text{cote}_1^{\ 2} + \mathrm{IT}\text{cote}_2^{\ 2} + \ldots]^{0,5}}$$

Exemple 1 : le dispositif proposé **(fig. 28 et 29)** peut être considéré comme un assemblage de trois composants mis bout à bout (empilés) ou comme un ensemble de trois dimensions successives d'un même composant (15, 20 et 25 sont des cotes moyennes).



28. Dimensions respectives des composants A,B,C.



29. Dispositif assemblé.

$Y_{\text{moyen}} = A_{\text{moyen}} + B_{\text{moyen}} + C_{\text{moyen}} = 15 + 20 + 25 = 60$ mm

1) Calcul de ITY à partir du système des tolérances absolues
$ITY = ITA + ITB + ITC = 0,04 + 0,06 + 0,08 = 0,18$
$Y \pm T_y = 60 \pm 0,09$ mm $(59,91 \leqslant Y \leqslant 60,09)$

2) Calcul de ITY en supposant une répartition statistique (loi normale)
$ITY^2 = ITA^2 + ITB^2 + ITC^2 = 0,04^2 + 0,06^2 + 0,08^2$
$ITY = 0,108$
$Y \pm T_y = 60 \pm 0,054$ mm (à comparer avec $60 \pm 0,090$)
Écart-type de Y : $\sigma Y = 0,054/3 = 0,018$ mm
$60 - 3.\sigma Y \leqslant 99,74\ \%$ des $Y \leqslant 60 + 3.\sigma Y$
$59,946 \leqslant 99,74\ \%$ des $Y \leqslant 60,054$ mm

3) Pourcentage de cotes en dehors de l'intervalle de tolérances absolues (cas où $Y > 60,09$ et $Y < 59,91$)

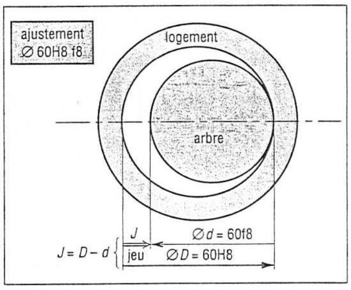
$$P(Y \leqslant 59,91) = \phi\left[\frac{59,91 - \mu_Y}{\sigma_Y}\right] = \phi\left[\frac{59,91 - 60}{0,018}\right] = \phi\,[-5] = 0,000\,000\,287$$

$$P(Y \geqslant 60,09) = 1 - \phi\left[\frac{60,09 - \mu_Y}{\sigma_Y}\right] = 1 - \phi\,[-5] = 0,000\,000\,287$$

Pourcentage de rebus = $2.0,000\,000\,287 \approx 0,000\,000\,6$
(environ 6 cotes sur 10 000 000 en dehors de l'intervalle spécifié).

Exemple 2 (fig. 30) : cas d'un ajustement 60 H8f8 avec jeu entre un arbre et un logement (ITH8 = ITf8 = 0,046 mm pour 60 mm). Les caractéristiques sont données dans le tableau ci-dessous :

arbre	$59,924 \leqslant 60\ f8 \leqslant 59,970$ mm $d = 59,947 \pm 0,023$ mm $(d_{moyen} = 59,947)$
logement	$60,000 \leqslant 60\ H8 \leqslant 60,046$ mm $D = 60,023 \pm 0,023$ mm $(D_{moyen} = 60,023)$
jeu	cas des toléreances absolues $ITJ = ITD + ITd = 2 \times 0,046$ $J = 0,076 \pm 0,046$



30. Ajustement 60 H8f8.

1) Tolérance sur le jeu, cas d'une répartition statistique (loi normale)
$ITJ = [ITD^2 + ITd^2]^{0,5} = [2.0,046^2]^{0,5} = 0,065$
$J = 0,076 \pm 0,032\,5$
Écart-type : $\sigma_J = ITJ/6 \approx 0,010\,8$ mm
$J_{moyen} - 3.\sigma J \leqslant 99,7\ \%$ des jeux $J \leqslant J_{moyen} + 3.\sigma_J$
$0,043\,5 \leqslant (99,7\ \%$ des jeux $J) \leqslant 0,108\,5$ mm

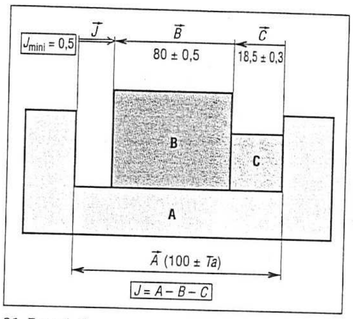
2) Pourcentage de refus si on rejette les montages tel que $J > 0,100$ et $J < 0,050$

$$P(J < 0,05) = \phi\left[\frac{0,05 - 0,076}{0,010\,8}\right] = \phi\,(-2,42) = 0,007\,8\ (0,78\ \%)$$

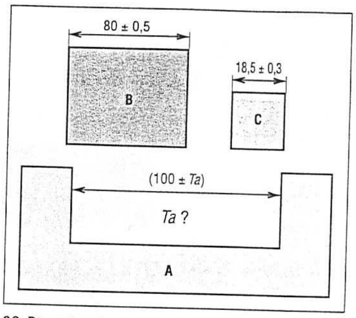
$$P(J > 0,100) = 1 - \phi\left[\frac{0,10 - 0,076}{0,010\,8}\right] = 1 - \phi\,(2,22) = 1 - 0,986\,1 = 0,013\,9\ (1,39\ \%)$$

Pourcentage de refus : $1,39 + 0,78 = 2,17\ \%$

Exemple 3 : pour le dispositif proposé les dimensions connues sont :



31. Exemple 3.



32. Dimensions des composants A, B et C.

$A = 100 \pm Ta$; $B = 80 \pm 0,5$ et $C = 18,5 \pm 0,3$.
Si un jeu minimum de 0,5 mm est imposé, quelle doit être la valeur de la tolérance Ta ?
$J_{moyen} = A_{moyen} - B_{moyen} - C_{moyen} = 100 - 80 - 18,5 = 1,5$ mm

1) Cas du système de tolérancement absolu
$J_{mini} = 0,5 = A_{mini} - B_{maxi} - C_{maxi}$
$0,5 = (100 - Ta) - (80 - 0,5) - (18,5 - 0,3) = 0,7 - Ta$
$Ta = 0,2$ mm ; $A \pm Ta = 100 \pm 0,2$
$ITJ = ITA + ITB + ITC = 0,4 + 1,0 + 0,6 = 2,0$ mm ; $J = 1,5 \pm 1,0$ mm

2) Cas d'une répartition statistique des quatre dimensions (loi normale)
Supposons $J = 1,5 \pm 1,0$ mm (inchangé)
$ITJ^2 = ITA^2 + ITB^2 + ITC^2$
$2,0^2 = (2.Ta)^2 + 1,0^2 + 0,6^2$
$Ta = (0,66)^{0,5} = 0,812$ mm
$A = 100 \pm 0,812$ (à comparer avec $100 \pm 0,2$)

Remarque : si pour ce cas on a A_{mini} (99,188) en même temps que B_{maxi} (80,5) et C_{maxi} (18,8), il y a interférence (99,188 – 80,5 – 18,8 = –1,12mm). Cependant, d'un point de vue statistique, ce cas est très peu probable.

Conclusions : les exemples précédents montrent que l'utilisation des statistiques permet de concevoir des tolérances plus larges.

XIV - Exercices

Exercice 1

Dans une fonderie, pour surveiller la masse d'une série de pièces moulées, on réalise à intervalle régulier la pesée d'un échantillon de 30 pièces. Les mesures collectées en kg de l'un des échantillons sont :

131	140	129	128	132	135	142	122	126	118	120	125	128	128	111
133	107	147	136	130	130	132	138	128	124	128	129	127	127	122

a) Classer les mesures dans une table de six intervalles allant de 106 à 147 kg, tracer l'histogramme correspondant.
b) Déterminer la moyenne et l'écart-type.