Cours BTS	VECTEURS	Vecteurs-C-d

I) Introduction

En mécanique, les vecteurs sont utilisés pour représenter les forces ($\vec{F}$, $\overrightarrow{A_{0/1}}$), les moments ($\vec{M}$, $\overrightarrow{M_0(\vec{F})}$), les vitesses ($\vec{V}$, $\overrightarrow{V_{A1/0}}$), les accélérations ($\vec{a}$, $\overrightarrow{a_{A1/0}}$), les contraintes ($\vec{\sigma}$, $\vec{\tau}$), etc.

Un vecteur est une grandeur définie par une direction, un sens et une intensité.

a) La direction est la droite qui porte le vecteur. Elle est définie par l'angle θ mesuré entre un axe de référence et le support.

b) Le sens représente l'orientation origine-extrémité du vecteur et est symbolisé par une flèche.

c) L'intensité, norme ou module, représente la valeur de la grandeur mesurée par le vecteur. Graphiquement, elle correspond à la longueur de celui-ci. Notation : V, $|\vec{V}|$ ou $\|\vec{V}\|$.

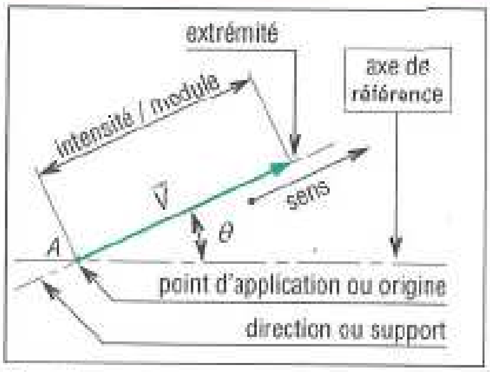


Fig. 1

d) Le point d'application est le point qui sert d'origine à un représentant (ou image) du vecteur.

Remarque : définir un vecteur, c'est connaître les quatre paramètres précédents.

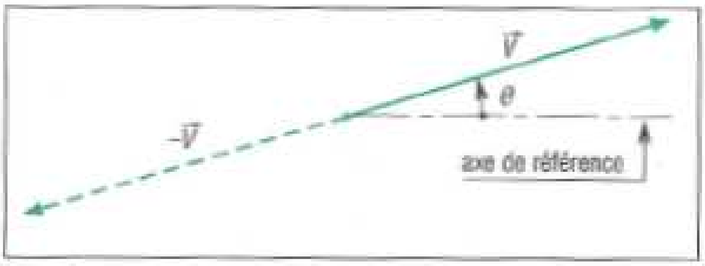


Fig. 2

Vecteur glissant ou glisseur : vecteur dont le point d'application peut être quelconque sur un support ou une ligne d'action imposée.

Vecteur lié ou pointeur : vecteur ayant un point d'application.

2 familles de vecteur

En Cinématique

Soient 2 points $A\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$

* Vecteur Position

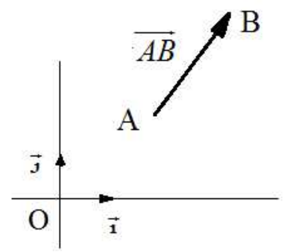
$\boxed{\overrightarrow{OA} = \left| \begin{array}{l} x_A - x_O \\ y_A - y_O \end{array} \right.}$ $\boxed{\overrightarrow{OB} = \left| \begin{array}{l} x_B - x_O \\ y_B - y_O \end{array} \right.}$

* Vecteur Déplacement linéaire

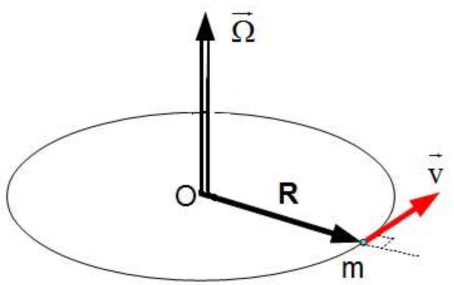
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ (Relation de Chasles)

$$= \left| \begin{array}{l} x_O - x_A \\ y_O - y_A \end{array} \right. + \left| \begin{array}{l} x_B - x_O \\ y_B - y_O \end{array} \right.$$

$$\boxed{\overrightarrow{AB} = \left| \begin{array}{l} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{array} \right.}$$



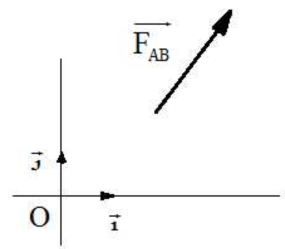
* Vecteur vitesse : Linéaire $\vec{v}$ et angulaire $\vec{\Omega}$



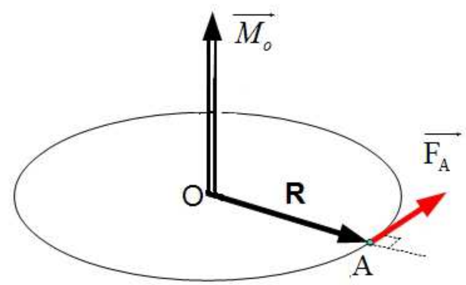
En statique / dynamique

* Vecteur Force

$\overrightarrow{F_{AB}} = \left| \begin{array}{l} FA_x \\ FA_y \end{array} \right.$



* Vecteur Moment



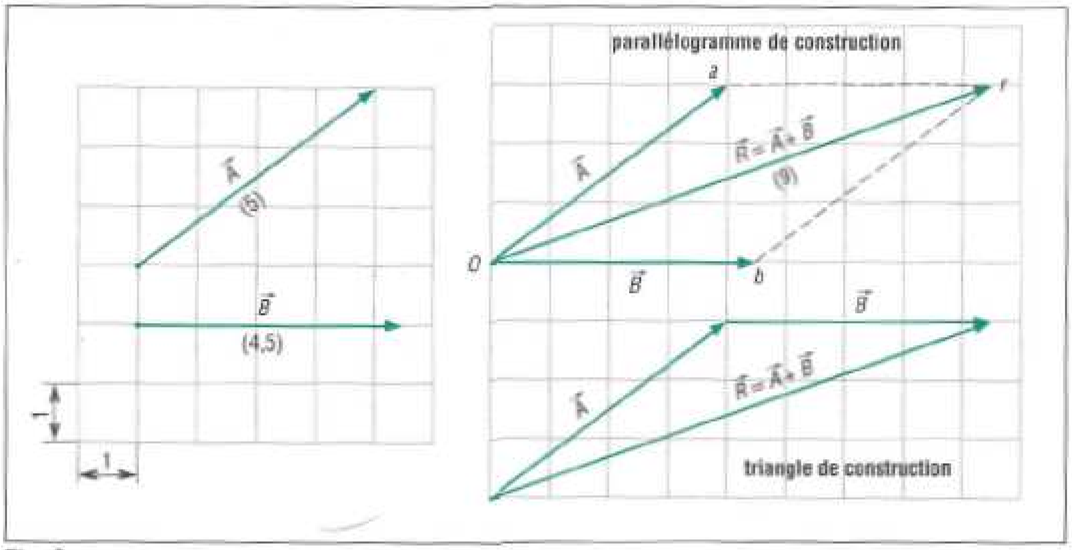
Cours BTS	VECTEURS	Vecteurs-C-d

II) Opérations sur les vecteurs

1) Addition

Des vecteurs de même nature peuvent être additionnés pour former un troisième vecteur appelé vecteur-somme.

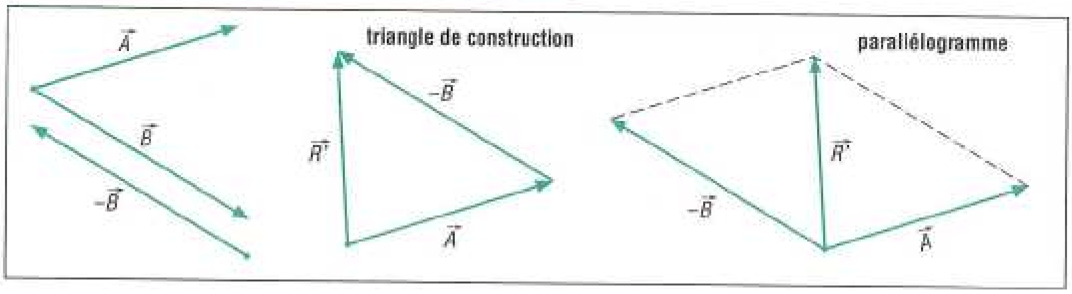
Exemple : déterminons la somme $\vec{R}$ des deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ proposés.



2) Soustraction

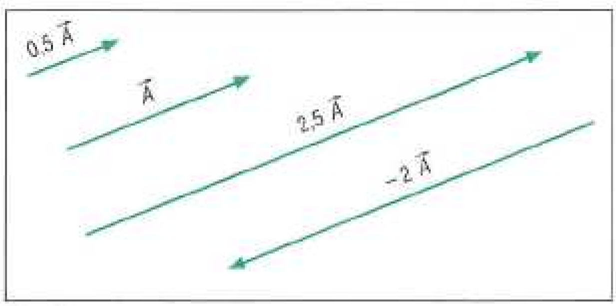
La différence entre les vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ se ramène à une addition en ajoutant le vecteur opposé $(-\vec{B})$.

$$\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B}) = \vec{R}'$$



3) Multiplication d'un vecteur par un scalaire

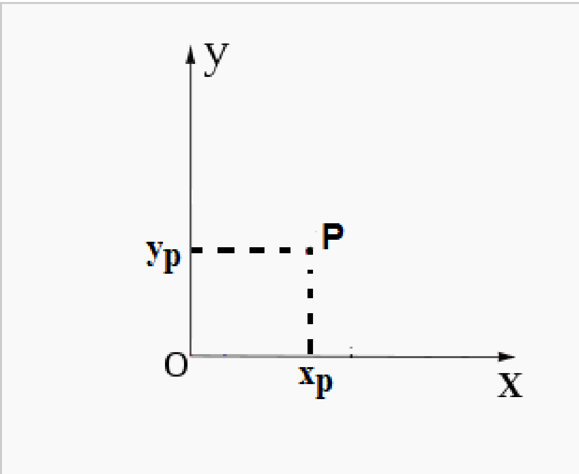
Les sommes $(\vec{A} + \vec{A})$ et $(\vec{B} + \vec{B} + \vec{B})$ s'écrivent simplement sous la forme $2\vec{A}$ et $3\vec{B}$, produit des scalaires 2 et 3 par les vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$.
De la même façon, on peut écrire $-3\vec{F}$, $-\frac{1}{4}\vec{V}$ ...



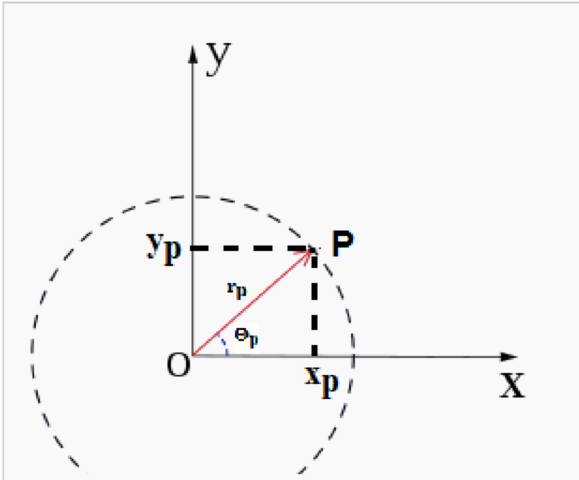
Si $\vec{A}$ a pour intensité 100 N, les intensités de $0{,}5\vec{A}$, de $2{,}5\vec{A}$ et de $-2\vec{A}$ seront respectivement de 50 N, 250 N et 200 N.

III) Composantes cartésiennes des vecteurs

Préalables : Coordonnées cartésiennes et polaires



En coordonnées cartésienne , la position du point P est définie par l'abscisse xp et l'ordonnée yp



En coordonnées polaires , la position du point P est définie par le rayon rp et l'angle p

$\boxed{P\ (x_p\ ,y_p\ )}$

$\boxed{P\ [\ r_p\ ,\Theta_p\ ]}$

$$r_p=\sqrt{x_p{}^2+y_p{}^2}$$
$$\theta_p=\tan^{-1}\left(\frac{y_p}{x_p}\right)$$

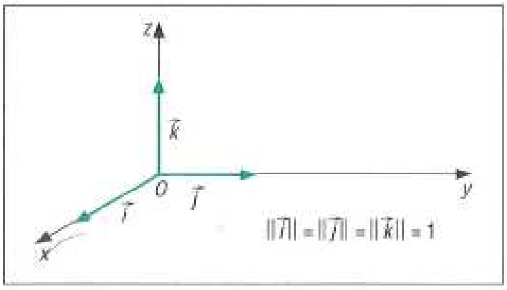
$$x_p=r_p\ \cos\theta_p$$
$$y_p=r_p\ \sin\theta_p$$

Cours BTS	VECTEURS	Vecteurs-C-d

1) Vecteurs unitaires

Les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont des vecteurs unitaires d'intensité égale à 1.
$\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont les vecteurs de base du repère orthonormé (O, x, y, z).

Remarque : les vecteurs unitaires des axes x, y, z sont parfois notés $\vec{x}$, $\vec{y}$ et $\vec{z}$.



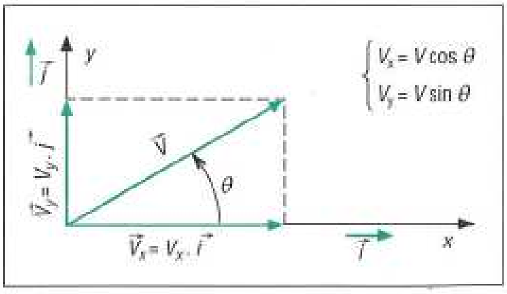
2) Composantes dans le plan

Dans le plan, le vecteur $\vec{V}$ a pour Composantes $\vec{V_x}$ et $\vec{V_y}$.

$$\vec{V} = \vec{V_x} + \vec{V_y} = \left| \begin{matrix} V_x \\ V_y \end{matrix} \right. = V_x \,.\, \vec{i} + V_y \,.\, \vec{j}$$

Direction : $\tan\theta = \dfrac{V_y}{V_x}$

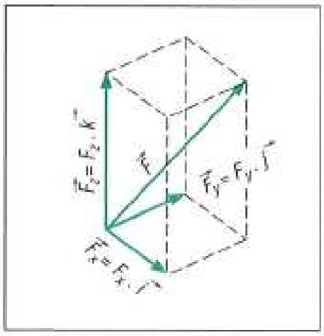
Intensité : $\boxed{\|\vec{V}\| = V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}}$



3) Composantes dans l'espace

$$\vec{V} = \left| \begin{matrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{matrix} \right. = F_x \,.\, \vec{i} + F_y \,.\, \vec{j} + F_z \,.\, \vec{k}$$

$$\boxed{\|\vec{F}\| = F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}}$$



4) Somme de vecteurs

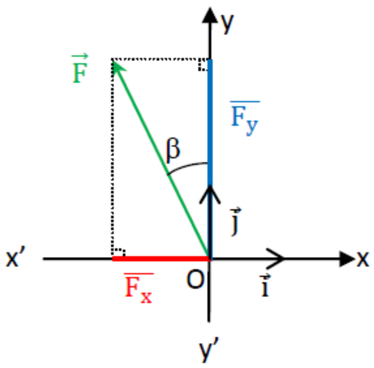
Soit n vecteurs $\vec{F_1}, \vec{F_2}, \ldots, \vec{F_n}$, de coordonnées : $\vec{F_i} = F_i x \,.\, \vec{i} + F_i y \,.\, \vec{j} + F_i z \,.\, \vec{k}$

$$\vec{S} = \vec{F_1} + \vec{F_2} + \ldots + \vec{F_n} = \left| \begin{matrix} Sx \\ Sy \\ Sz \end{matrix} \right. = \left| \begin{matrix} \sum Fx \\ \sum Fy \\ \sum Fz \end{matrix} \right.$$

Application : Le vecteur force

Cas d'un vecteur force

Considerons, dans un repère $(O\ ;\ \vec{i},\ \vec{j})$, une force $\vec{F}$ inclinée d'un angle β par rapport à la verticale :



- La coordonnée $\overline{F_x}$ correspond à la projection du vecteur force $\vec{F}$ sur l'axe des abscisses :

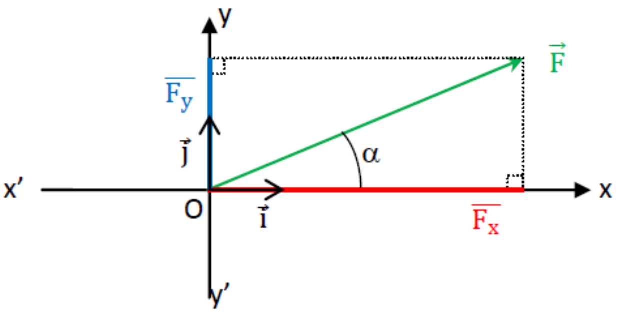
  $\sin\beta = -\dfrac{\overline{F_x}}{\|\vec{F}\|}$ soit $\overline{F_x} = -\|\vec{F}\| \times \sin\beta$ soit $\boxed{\overline{F_x} = -F \times \sin\beta}$

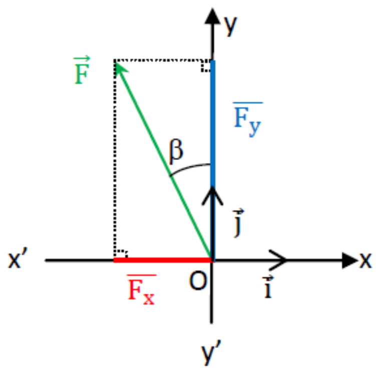
- La coordonnée $\overline{F_y}$ correspond à la projection du vecteur force $\vec{F}$ sur l'axe des ordonnées :

  $\cos\beta = \dfrac{\overline{F_y}}{\|\vec{F}\|}$ soit $\overline{F_y} = \|\vec{F}\| \times \cos\beta$ soit $\boxed{\overline{F_y} = F \times \cos\beta}$

Rq. : Les termes F et sinβ sont positifs : la coordonnée $\overline{F_x}$ est négative.
Les termes F et cosβ sont positifs : la coordonnée $\overline{F_y}$ est positive.

Norme d'un vecteur force





Qu'un vecteur possède des coordonnées positives ou une ou deux coordonnées négatives, sa norme peut être déterminée grâce au théorème de Pythagore : $\|\vec{F}\|^2 = \overline{F_x}^2 + \overline{F_y}^2$ soit $\boxed{F = \sqrt{\overline{F_x}^2 + \overline{F_y}^2}}$

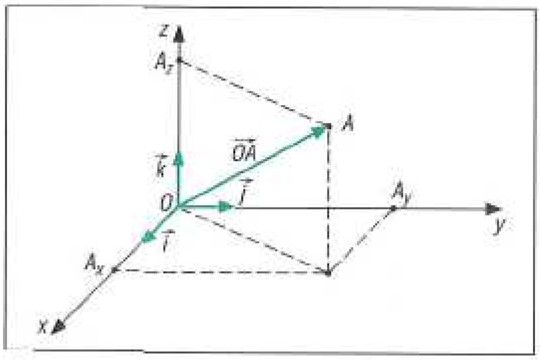
IV) Vecteur position

Les vecteurs positions sont utilisés pour repérer la position d'un point ou pour représenter un segment ou une distance.

1) Position d'un point A dans l'espace

$$\overrightarrow{OA}\begin{cases} X_A = OAx \\ Y_A = OAy \\ Z_A = OAz \end{cases}$$

$$\overrightarrow{OA} = X_A.\vec{i} + Y_A.\vec{j} + Y_A.\vec{k}$$



Remarque : dans un plan (x, y),
$\vec{k} = \vec{0}$ donne $\overrightarrow{OA} = X_A.\vec{i} + Y_A.\vec{j}$

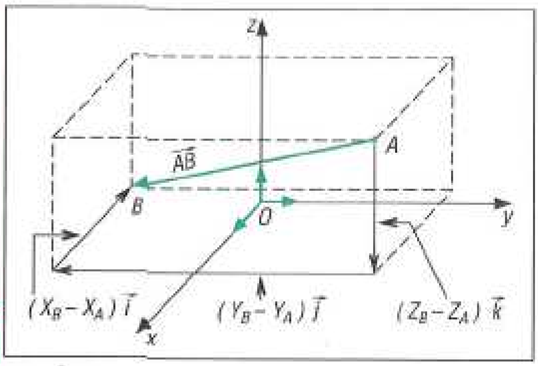
2) Représentation de la distance AB

$$\overrightarrow{OA}\begin{Bmatrix} X_A \\ Y_A \\ Z_A \end{Bmatrix} \quad \overrightarrow{OB}\begin{Bmatrix} X_B \\ Y_B \\ Z_B \end{Bmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

$$\overrightarrow{AB} = (X_B - X_A)\,\vec{i} + (Y_B - Y_A)\,\vec{j} + (Z_B - Z_A)\,\vec{k}$$

$$\boxed{\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{(X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2 + (Z_B - Z_A)^2}}$$



Rem : Pour déterminer les composantes de $\overrightarrow{AB}$, on a utilisé la relation de Chasles $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}$

V) Produit scalaire de 2 vecteurs

1) Définition

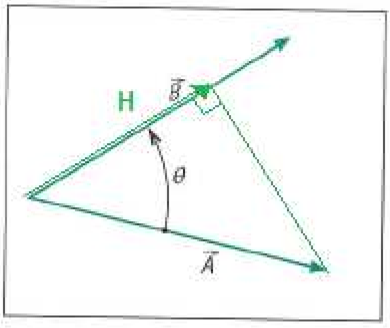
Le produit scalaire du vecteur $\vec{A}$ par le vecteur $\vec{B}$, noté $\vec{A}.\vec{B}$, est égal au produit des modules des deux vecteurs multiplié par le cosinus de l'angle (θ) entre leurs directions respectives.

$$\vec{A}\,.\,\vec{B} = A\,.\,B\,.\cos\theta = \|\vec{A}\|\,.\,\|\vec{B}\|\,.\cos\theta = \vec{B}\,.\,\vec{A}$$

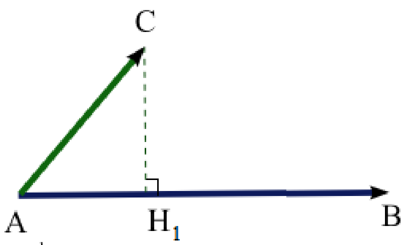
Si : $\vec{A} = A_x\,.\,\vec{i} + A_y\,.\,\vec{j} + A_z\,.\,\vec{k}$

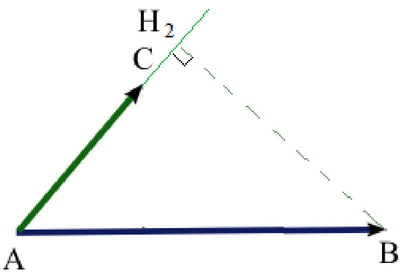
$\vec{B} = B_x\,.\,\vec{i} + B_y\,.\,\vec{j} + B_z\,.\,\vec{k}$

$$\vec{A}\,.\,\vec{B} = A_x\,.\,B_x + A_y\,.\,B_y + A_z\,.\,B_z$$



*** Propriété 1**





$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \overline{AB}\times\overline{AH_1} = AB\times AH_1$ $=$ $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB} = \overline{AC}\times\overline{AH_2} = AC\times AH_2$

*** Propriété 2**

Si $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$ alors $\boxed{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 0}$

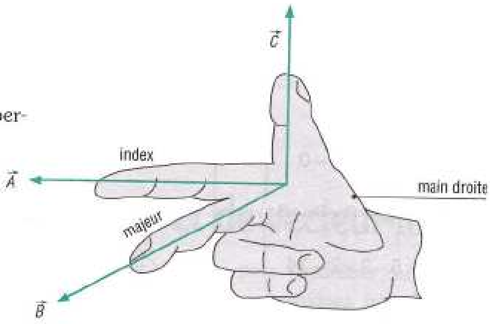
Cours BTS	VECTEURS	Vecteurs-C-d

VI) Produit vectoriel de 2 vecteurs

1) Définition

Le produit vectoriel du vecteur $\vec{A}$ par le vecteur $\vec{B}$, noté $\vec{A}\wedge\vec{B}$, est un vecteur $\vec{C}$ perpendiculaire au plan $(\vec{A}, \vec{B})$ et tel que :

$$\boxed{\vec{A}\wedge\vec{B} = \vec{C} = A\,.\,B \sin\theta\,\vec{u_C}}$$ avec $\|\vec{C}\| = A\,.\,B \sin\theta$ et $\|\vec{u_c}\| = 1$



règle des trois doigts de la main droite

2) Calcul en coordonnées cartésiennes

Si $\vec{A} = A_x\,.\,\vec{i} + A_y\,.\,\vec{j} + A_z\,.\,\vec{k}$
et $\vec{B} = B_x\,.\,\vec{i}$ et $B_y\,.\,\vec{j} + B_z\,.\,\vec{k}$ alors :

$$\boxed{\vec{A}\wedge\vec{B} = (A_y\,.\,B_z - A_z\,.\,B_y)\,\vec{i} + (A_z\,.\,B_x - A_x\,.\,B_z)\,\vec{j} + (A_x\,.\,B_y - A_y\,.\,B_x)\,\vec{k}}$$

Principe de détermination à partir des produits en croix

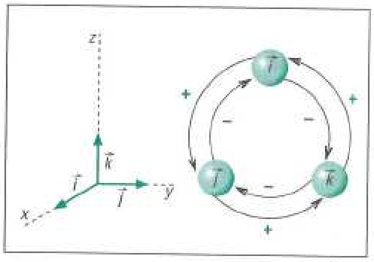
$$\vec{A}\wedge\vec{B} = \vec{C}\;\left|\;\begin{array}{l} Cx = Ay\,Bz - Az\,By = \begin{bmatrix} \vec{i} & Ax & Bx \\ \vec{j} & Ay & By \\ \vec{k} & Az & Bz \end{bmatrix} \\ Cy = Az\,Bx - Ax\,Bz = -\begin{bmatrix} \vec{i} & Ax & Bx \\ \vec{j} & Ay & By \\ \vec{k} & Az & Bz \end{bmatrix} \\ Cz = Ax\,By - Ay\,Bx = \begin{bmatrix} \vec{i} & Ax & Bx \\ \vec{j} & Ay & By \\ \vec{k} & Az & Bz \end{bmatrix} \end{array}\right.$$

$\ominus$ $\oplus$

$$\begin{bmatrix} \vec{i} & Ax & Bx \\ \vec{j} & Ay & By \\ \vec{k} & Az & Bz \end{bmatrix}$$

déterminant de base

3) Signe des produits vectoriels



Compléments

Vecteurs particuliers:

* Vecteur nul : $\vec{0} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$

* Vecteur opposé : $\overrightarrow{OA} = -\,\overrightarrow{AO}$